同调论

葛化彬

目录

0　前言

0.1　关于这篇讲义

这篇讲义是根据葛化彬老师在第十四期北京国际数学中心强化班上课时的板书整理而成，其中增加了部分我本人在学习中的理解。由于本人精力以及能力的限制，在整理过程中难免出现一些疏漏，而这都是我本人的错误。如有任何修改意见，欢迎通过邮件与我联系：bowenl@mail.sdu.edu.cn

刘博文
于北京大学图书馆

1 奇异同调

1.1 范畴与函子

1.1.1 范畴

定义 1.1.1 (范畴)**.** 一个范畴 $\mathcal{C}$ 是由以下要素组成：

1. 一类数学对象 $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$；
2. 对于每两个对象 X, Y，给定了一个集合 $\mathrm{Mor}(X,Y)$，其元素称为从 X 到 Y 的射，记 $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ 为 $f: X \to Y$；
3. 一个复合规则 $\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z)$，记作 $(f,g) \mapsto g \circ f$，并且满足以下性质：

   (1) 结合律：对任意的 $f: X \to Y, g: Y \to Z, h: Z \to W$，满足
   $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

   (2) 单位律：每个对象 X 有一个单位射 $\mathrm{id}_X: X \to X$，满足对任何 $f: Y \to X$ 有
   $$\mathrm{id}_X \circ f = f$$
   对于任何 $g: X \to Z$，满足
   $$g \circ \mathrm{id}_X = g$$

在下面的例子中，都以 {对象，射} 的形式展示：

例 1.1.1. 集合的范畴：{集合，函数}

例 1.1.2. 光滑流形的范畴：{光滑流形，光滑映射}

例 1.1.3. 拓扑空间的范畴：{拓扑空间，连续映射}

例 1.1.4. 单纯复形的范畴：{单纯复形，单纯映射}

例 1.1.5. 阿贝尔群的范畴：{阿贝尔群，群同态}

例 1.1.6. 群的范畴：{群，群同态}；环的范畴：{环，环同态}

例 1.1.7. 域 F 上线性空间的范畴：{F 线性空间，F 线性映射}

例 1.1.8. 域 F 上的代数的范畴：{F 代数，F 代数同态}

例 1.1.9. 拓扑空间的范畴：{拓扑空间，X 到 Y 映射的同伦类}

例 1.1.10. 带基点的拓扑空间的范畴：{带基点的拓扑空间，保持基点的连续映射}

例 1.1.11. 取定拓扑空间 X，考虑：{X 中的点，从点 a 到点 b 的道路的同伦类，其中 $a, b \in X$}

1.1.2 协变函子

定义 1.1.2 (协变函子)**.** 假设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是两个范畴，一个协变函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个对应：

1. $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个对象 $F(X)$;
2. $\mathcal{C}$ 的每个射 $f:X\to Y$ 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个射 $F(f):F(X)\to F(Y)$，满足以下性质：
   (1) 复合律：对于射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$，有
   $$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$$
   (2) 单位律：对于任意对象 X，有
   $$F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$$

例 1.1.12. 遗忘函子：$\{$拓扑空间，映射$\}\to\{$集合，函数$\}$

例 1.1.13. 基本群函子 $\pi_1:\{$带基点的拓扑空间，保持基点的连续映射$\}\to\{$群，群同态$\}$

例 1.1.14. 单纯同调函子 $H_*:\{$单纯复形，单纯映射$\}\to\{$阿贝尔群，群同态$\}$

1.1.3 反变函子

定义 1.1.3 (反变函子)**.** 假设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是两个范畴，一个反变函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个对应：

1. $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个对象 $F(X)$;
2. $\mathcal{C}$ 的每个射 $f:X\to Y$ 对应于 $\mathcal{D}$ 的一个射 $F(f):F(Y)\to F(X)$，满足以下性质：
   (1) 复合律：对于射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$，有
   $$F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)$$
   (2) 单位律：对于任意对象 X，有
   $$F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$$

例 1.1.15. 对偶函子:$\{$域 F 上的线性空间，F 线性映射$\}\to\{$对偶空间，映射的拉回$\}$

例 1.1.16. 给定拓扑空间 X，考虑 $C(X)=\{$连续函数 $X\to\mathbb{R}\}$，则有反变函子 $C^*:\{$拓扑空间，连续映射$\}\to\{$实代数，实代数同态$\}$

定义 1.1.4. 称一个射 $f : X \to Y$ 是可逆的，如果存在射 $g : Y \to X$，使得：

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

定义 1.1.5 (同构)**.** 称两个对象是同构的，如果它们之间存在一对互逆的射。

命题 1.1.1. 协变（反变）函子总是把单位射变成单位射，把可逆射变成可逆射，把同构的对象变成同构的对象。

证明. 这里只对协变函子进行验证：根据定义，函子总把单位射映成单位射；设函子为 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$f : C_1 \to C_2$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个可逆射，其逆为 $g : C_2 \to C_1$，那么

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}) = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

即 $F(f)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的可逆射，其逆为 $F(g)$；如果 C_1, C_2 是 $\mathcal{C}$ 中的同构的对象，同构由 f 给出，那么 $F(C_1), F(C_2)$ 自然也是 $\mathcal{D}$ 中的同构对象，同构由 $F(f)$ 给出。 □

1.2 链复形与链映射

1.2.1 链复形及其同调群

定义 1.2.1 (链复形)**.** 一个链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 是一串阿贝尔群 C_q 以及一串群同态 $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$（称为 q 维边缘算子），满足 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0, \forall q \in \mathbb{Z}$，写法上有：

$$\cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \dots$$

定义 1.2.2 (闭/边缘链群)**.** 链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 的 q 维闭链群定义为 $Z_q(C) = \ker \partial_q$；q 维边缘链群定义为 $B_q(C) = \mathrm{im}\, \partial_{q+1}$

定义 1.2.3 (同调群)**.** 链复形 C 的 q 维同调群定义为 $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$，其元素称为 C 的 q 维同调类。

约定 1.2.1. 我们约定，$z_q \in Z_q(C)$ 所代表的同调类为 $[z_q] \in H_q(C)$，记 $H_*(C) = \{H_q(C)\}$，实际上，$H_*(C)$ 是一个分次群。

定义 1.2.4 (分次群)**.** 分次群指的是一个阿贝尔群序列 $G_* = \{G_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$，分次群同态 $\phi_* : G_* \to G'_*$ 指的是一个同态序列 $\{\phi_q : G_q \to G'_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$

定义 1.2.5 (链映射)**.** 设 C, D 是链复形，一个链映射 $f : C \to D$ 是一串同态 $f_q : C_q \to D_q$，满足：

$$\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q, \quad \forall q$$

即下面的图表交换[1]：

[1]我们不在符号上区分不同链复形之间的边缘同态，一并记作 ∂_q，请读者留心。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_q} & & \downarrow{\scriptstyle f_{q-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial_q} & D_{q-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

1.2.2 链映射及其诱导同态

命题 1.2.1. 链映射 $f: C \to D$ 诱导出同调群的同态 $f_*: H_*(C) \to H_*(D)$，映射为 $f_*([z_q]) = [f_q(z_q)], \forall z_q \in Z_q(C)$

证明. 首先验证映射是良定义的，任取 $b_q = \partial_{q+1}(b_{q+1}) \in \operatorname{im} \partial_{q+1}$，即在 C_q 的边缘链群中，则需要证明 $f_q(b_q) \in \operatorname{im} \partial_{q+1}$，根据 $f_q \circ \partial_{q+1} = \partial_{q+1} \circ f_{q+1}$，有

$$f_q(b_q) = \partial_{q+1} \circ f_{q+1}(b_{q+1}) \in \operatorname{im} \partial_{q+1}$$

即定义是良好的;

下面证明 f_* 是一个群同态，即验证:

$$f_*([z_q] + [z'_q]) = f_*([z_q]) + f_*([z'_q])$$

根据定义，因为 $f_q: C_q \to D_q$ 的同态,:

$$\begin{aligned} f_*([z_q] + [z'_q]) &= [f_q(z_q + z'_q)] \\ &= [f_q(z_q) + f_q(z'_q)] \end{aligned}$$

而 $[f_q(z_q)+f_q(z'_q)]$ 与 $[f_q(z_q)]+[f_q(z'_q)]$ 是相同的,因为它们的差只是一个边缘链。 □

至此，我们得到了一个新的范畴，即链复形的范畴 {链复形，链映射}，以及一个新的函子，同调函子: {链复形，链映射} $\to$ {分次群，分次群同态}。

1.2.3 链同伦

定义 1.2.6 (链同伦)**.** 两个链映射 $f, g: C \to D$ 称为是链同伦的，如果存在一串同态 $T = \{T_q: C_q \to D_{q+1}\}$，如下面图表:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}-g_{q+1}"'] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q-g_q"] \arrow[dl, dashed, "T_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-1}-g_{q-1}"] \arrow[dl, dashed, "T_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial_q"] & D_{q-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

使得对任意 q 满足 $\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$，称 T 为连接 f, g 的一个链同伦，记作 $f \simeq g: C \to D$ 或者 $T: f \simeq g: C \to D$

定理 1.2.1. 假设 $f \simeq g: C \to D$，则 $f_* = g_*: H_*(C) \to H_*(D)$，即链同伦的链映射诱导出相同的同调群同态。

证明. 即验证 $f_* - g_*$ 是零映射即可：任取 $[z_q] \in H_q(C)$，则

$$
\begin{aligned}
f_* - g_*([z_q]) &= [f_q - g_q(z_q)] \\
&= [\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q(z_q)] \\
&= [\partial_{q+1} \circ T_q(z_q)] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

命题 1.2.2. 链映射之间的链同伦关系是一个等价关系。

证明. 自反性与对称性是显然的，而对于传递性：假设 $f \simeq g, g \simeq h$，那么存在 $\{T_q : C_q \to D_{q+1}\}$ 以及 $\{T'_q : C_q \to D_{q+1}\}$ 使得

$$
\begin{aligned}
\partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q \\
\partial_{q+1} \circ T'_q + T'_{q-1} \circ \partial_q = h_q - g_q
\end{aligned}
$$

那么两式直接相加则有：

$$
\partial_{q+1} \circ (T_q + T'_q) + (T_{q-1} + T'_{q-1}) \circ \partial_q = h_q - f_q
$$

即 $f \simeq h$ □

定义 1.2.7 (同伦等价)**.** 两个链复形 C, D 称为是链同伦等价的，如果存在链映射 $f : C \to D, g : D \to C$，使得 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_D, g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$

命题 1.2.3. 链同伦等价诱导同调群的同构，因而链同伦等价的链复形有同构的同调群。

证明. 链同伦等价是链复形层面上的同构关系，根据命题 1.1.1，函子将同构的对象映射成同构的对象。 □

习题 1.2.1. 若 $f \simeq f' : C \to D, g \simeq g' : D \to E$ 都是链同伦的链映射，那么 $g \circ f \simeq g' \circ f' : C \to E$

证明. 根据定义，存在 $\{T_q : C_q \to D_{q+1}\}$ 以及 $\{T'_q : D_q \to E_{q+1}\}$ 使得

$$
\begin{aligned}
\partial^D_{q+1} \circ T_q + T_{q-1}\partial^C_q = f'_q - f_q \\
\partial^E_{q+1} \circ T'_q + T'_{q-1} \circ \partial^D_q = g'_q - g_q
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
g'_q \circ f'_q - g_q \circ f_q &= g'_q \circ (f'_q - f_q) + (g'_q - g_q) \circ f_q \\
&= g'_q \circ (\partial^D_{q+1} \circ T_q + T_{q-1}\partial^C_q) + (\partial^E_{q+1} \circ T'_q + T'_{q-1} \circ \partial^D_q) \circ f_q
\end{aligned}
$$

注意到

$$g'_q \circ \partial^D_{q+1} = \partial^E_{q+1} \circ g'_{q+1}$$
$$\partial^D_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial^C_q$$

那么有

$$\begin{aligned} g'_q \circ f'_q - g_q \circ f_q &= \partial^E_{q+1} \circ g'_{q+1} \circ T_q + g'_q \circ T_{q-1} \circ \partial^C_q + \partial^E_{q+1} \circ T'_q \circ f_q + T'_{q-1} \circ f_{q-1} \circ \partial^C_q \\ &= \partial^E_{q+1} \circ (g'_{q+1} \circ T_q + T'_q \circ f_q) + (g'_q \circ T_{q-1} + T'_{q-1} \circ f_{q-1}) \circ \partial^C_q \end{aligned}$$

从而 $g \circ f \simeq g' \circ f'$ □

1.3 奇异同调群

1.3.1 奇异单形

定义 1.3.1 (标准单形). q 维标准单形 $\Delta_q = \{(x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^q x_i = 1\}$

定义 1.3.2 (奇异单形). 拓扑空间 X 中的 q 维奇异单形指的是一个连续映射 $\sigma : \Delta_q \to X$

例 1.3.1. （线性奇异单形）C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集，$c_0, c_1, \ldots, c_q \in C$，则有唯一的线性映射 $\Delta_q \to C$，把顶点 $e_0, \ldots, e_q$ 映射成 $c_0, \ldots, c_q$，记为 $(c_0 c_1 \ldots c_q) : \Delta_q \to C$，定义为 $\sum_i x_i e_i \mapsto \sum_i x_i c_i$

在下面的讨论中，我们取定拓扑空间 X

定义 1.3.3 (奇异链群). X 的 q 维奇异链群 $S_q(X)$ 定义为以 X 中所有 q 维奇异单形为基生成的自由阿贝尔群，其元素称为 q 维奇异链，具有形式

$$c_q = k_1 \sigma_q^{(1)} + \cdots + k_r \sigma_q^{(r)}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \sigma_q^{(i)} : \Delta_q \to X, q \geq 0$$

并且规定负维数的 $S_q(X) = 0$

定义 1.3.4 (边缘映射). X 中 q 为奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to X$ 的边缘定义为如下 $q-1$ 维奇异链

$$\partial \sigma = \partial(\sigma \circ (e_0 \ldots e_q)) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ (e_0 \ldots \hat{e_i} \ldots e_q)$$

做 $\mathbb{Z}$ 线性扩张得到

$$\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$$

是阿贝尔群同态。

命题 1.3.1. $S_*(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ 是链复形。

证明. 即验证 $\partial_{q-1}\circ\partial_q=0$，由于 ∂ 是群同态，因此只需要在奇异单形上验证即可。

先在标准单形上计算：

$$\begin{aligned}\partial_{q-1}\circ\partial_q(e_0\dots e_q)&=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\partial_{q-1}(e_0\dots\widehat{e_i}\dots e_q)\\&=\sum_{i=0}^{q}(\sum_{j<i}(-1)^j(e_0\dots\widehat{e_j}\dots\widehat{e_i}\dots e_q)+\sum_{j>i}(-1)^{j-1}(e_0\dots\widehat{e_i}\dots\widehat{e_j}\dots e_q))\\&=\sum_{0\le j<i\le q}(-1)^{i+j}(e_0\dots\widehat{e_j}\dots\widehat{e_i}\dots e_q)+\sum_{0\le i<j\le q}(-1)^{i+j-1}(e_0\dots\widehat{e_i}\dots\widehat{e_j}\dots e_q)\\&=0\end{aligned}$$

将上式用映射 $\sigma:\Delta_q\to X$ 复合就得到 $\partial_{q-1}\circ\partial_q(\sigma)=0$ □

1.3.2 奇异链复形与奇异同调群

定义 1.3.5 (奇异同调群)**.** 链复形 $S_*(X)=\{S_q(X),\partial_q\}$ 称为 X 的奇异链复形。由 X 的奇异链复形决定的同调群称为 X 的奇异同调群，记作 $H_*(X):=H_*(S_*(X))$

定义 1.3.6 (奇异链复形间的链映射)**.** 设 $f:X\to Y$ 是映射，它把 X 中的奇异单形 $\sigma:\Delta_q\to X$ 变成 Y 中的奇异单形 $f\circ\sigma$，记为 $f_\#(\sigma)$。通过线性扩张可以得到同态

$$f_\#:S_q(X)\to S_q(Y)$$

命题 1.3.2. $f_\#$ 与 ∂ 可交换，即 $f_\#:S_*(X)\to S_*(Y)$ 是链映射。

证明. 显然。 □

定义 1.3.7 (奇异链映射诱导的奇异同调群间的映射)**.** 映射 $f:X\to Y$ 诱导的同调群的同态 $f_*:H_*(X)\to H_*(Y)$ 指的是链映射 $f_\#:S_*(X)\to S_*(Y)$ 所诱导的同调群同态。

命题 1.3.3 (奇异同调群的拓扑不变性)**.** 同胚的拓扑空间有着同构的奇异同调群。

注 1.3.1. 协变函子 S_* 把拓扑空间范畴变到链复形范畴，同调函子把链复形范畴变成分次群范畴，将这两个协变函子复合得到协变函子称为奇异同调函子 H_*。因此用这种观点，命题 1.3.3 是直接的，因为根据命题 1.1.1，函子将同构的对象映成同构的对象。

例 1.3.2. 单点空间的奇异同调群 $H_*(\mathrm{pt})$ 如下

$$H_*(\mathrm{pt})=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0\\ 0, & q>0\end{cases}$$

这是因为对于每一个维度，都只有一个奇异单形 $\sigma:\Delta_q\to\{\mathrm{pt}\}$，因此 $S_q(X)=\mathbb{Z},\forall q\geq 0$，对于边缘同态 ∂_q 来说，我们有

$$\partial_q=\begin{cases}1, & q=2k+1\\ 0, & q=2k\end{cases}$$

因此我们有如下的链复形

$$0\longleftarrow\mathbb{Z}\xleftarrow{0}\mathbb{Z}\xleftarrow{1}\mathbb{Z}\xleftarrow{0}\mathbb{Z}\xleftarrow{1}\dots$$

因此可以得到我们期待的结果。

定义 1.3.8 (克罗内克同态). 克罗内克同态 $\varepsilon:S_0(X)\to\mathbb{Z}$ 定义为

$$\varepsilon(k_1a_1+\cdots+k_ra_r)=k_1+\cdots+k_r$$

注 1.3.2. $\varepsilon:S_0(X)\to\mathbb{Z}$ 诱导出满同态 $H_0(X)\to\mathbb{Z}$，因为 $S_0(X)=Z(X)$，并且每个 1 维奇异单形的边缘的克罗内克指标为零。

命题 1.3.4. 如果空间 X 道路连通，则 $\varepsilon:H_0(X)\to\mathbb{Z}$ 是同构。

证明. 任取基点 $p\in X$，任意 $c_0=k_1a_1+\cdots+k_ra_r\in\ker(\varepsilon)$，则 $c_0=c_0-\varepsilon(c_0)b=k_1(a_1-b)+\cdots+k_r(a_r-b)$，由于 X 道路连通，因此存在道路连接 a_i 和 b，对于每个 i 成立，记作 σ_i，因此

$$\partial(\sum_i k_i\sigma_i)=c_0$$

因此 c_0 是一个边缘链，因此 $\ker\varepsilon=0$，即 ε 是同构。 □

定义 1.3.9 (链复形的直和). 一族链复形 $\{C_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，其中 $C_\lambda=\{C_{\lambda q},\partial_{\lambda q}\}$ 这族链复形的直和定义为 $\bigoplus C_\lambda=\{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}C_{\lambda q},\bigoplus\partial_{\lambda q}\}$

命题 1.3.5.

$$H_*(\bigoplus_\lambda C_\lambda)=\bigoplus_\lambda H_*(C_\lambda)$$

证明. 我们具体写出链复形的直和如下：

$$\cdots\bigoplus_\lambda C_{\lambda q+1}\xrightarrow{\oplus_\lambda\partial_{\lambda q+1}}\bigoplus_\lambda C_{\lambda q}\xrightarrow{\oplus_\lambda\partial_{\lambda q}}\bigoplus_\lambda C_{\lambda q-1}\to\dots$$

因此可以注意到

$$H_q(\bigoplus_\lambda C_\lambda)=\ker\bigoplus_\lambda\partial_{\lambda q}/\operatorname{im}\bigoplus_\lambda\partial_{\lambda q+1}=\bigoplus_\lambda\ker\partial_{\lambda q}/\operatorname{im}\partial_{\lambda q+1}$$

最后一个等式成立是因为核与像是可以与直和交换的，因此

$$H_q(\bigoplus_\lambda C_\lambda)=\bigoplus_\lambda H_q(C_\lambda)$$

□

定理 1.3.1. 设 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 是 X 的道路连通分支分解，则有同调群的直和分解 $H_*(X)=\oplus_{\lambda\in\Lambda}H_*(X_\lambda)$

证明. 用 $\sum_X$ 记 X 中全体奇异单形的集合，则可以分解为 $\sum_X=\coprod_{\lambda\in\Lambda}\sum_{X_\lambda}$，从而有直和分解 $S_*(X)=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}S_*(X_\lambda)$ □

推论 1.3.1. 拓扑空间 X 道路连通当且仅当 $H^0(X)=\mathbb{Z}$

1.3.3 简约奇异同调群

定义 1.3.10 (增广链复形)**.** 拓扑空间 X 的增广链复形 $\widetilde{S}_*(X)=\{\widetilde{S}_q(X),\widetilde{\partial}_q\}$ 定义为

$$\widetilde{S}_q(X)=\begin{cases}S_q(X), & q>-1\\ \mathbb{Z}, & q=-1\end{cases}\qquad \widetilde{\partial}_q=\begin{cases}\partial_q, & q>0\\ \varepsilon, & q=0\end{cases}$$

注 1.3.3. 增广链复形只改变了 ∂_0 以及 $S_{-1}(X)$ 这两项，因此只会影响零阶同调群的结果，因为此时只有 ∂_0 的核发生了改变。在其余维数时，同调群不发生改变。

注 1.3.4. 由于 $f:X\to Y$ 诱导的 $f_\#:S_q(X)\to S_q(Y)$ 保持零维的克罗内克指数，因此如果规定 $f_\#:\widetilde{S}_{-1}(X)\to\widetilde{S}_{-1}(Y)$ 规定为 id，那么拓扑空间之间的映射可以过渡到增广链复形间的链映射 $f_\#:\widetilde{S}_*(X)\to\widetilde{S}_*(Y)$。

定义 1.3.11 (简约同调群)**.** 拓扑空间 X 的简约同调群定义为增广链复形 $\widetilde{S}_*(X)$ 对应的同调群，记作 $\widetilde{H}_*(X)$。$f:X\to Y$ 诱导的同态 $f_*:\widetilde{H}_*(X)\to\widetilde{H}_*(Y)$ 规定为链映射 $f_\#:\widetilde{S}_*(X)\to\widetilde{S}_*(Y)$ 所诱导的同调群同态

命题 1.3.6. 对于拓扑空间 X，简约同调群与同调群有如下关系

$$H_q(X)=\begin{cases}\widetilde{H}_q(X), & q\neq 0\\ \widetilde{H}_q(X)\oplus\mathbb{Z}, & q=0\end{cases}$$

证明. 由于增广链复形与链复形相比只改变了链群 C_{-1} 以及 ∂_0，因此对于 $q>0$ 时的同调群都是不改变的。

对于零维的情况，我们有

$$H_0(X)=C_0(X)/\operatorname{im}\partial_1,\quad \widetilde{H}_0(X)=\ker\varepsilon/\operatorname{im}\partial_1$$

而由于 ε 是满射，我们有

$$C_0(X)/\ker\varepsilon\cong\mathbb{Z}$$

因此可以得到

$$H_0(X)\cong\widetilde{H}_0(X)\oplus\mathbb{Z}$$

□

注 1.3.5. 上面的证明利用了一个看似“显然”的结果：

$$C_0(X)/\ker\varepsilon \cong \mathbb{Z} \implies C_0(X) \cong \ker\varepsilon \oplus \mathbb{Z}$$

实际上是因为下述短正合列分裂的结果

$$0 \to \ker\varepsilon \to C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

推论 1.3.2. 拓扑空间 X 是道路连通当且仅当 $\widetilde{H}_0(X) = 0$

习题 1.3.1. 设空间 A 由两个点组成，$A = \{a_0, a_1\}$，则

$$\widetilde{H}_q(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

而且 $\widetilde{H}_0(A)$ 的一个生成元是 $[a_1 - a_0]$

证明. 由于 $\sigma : \Delta_n \to A$ 是连续映射，并且 Δ 是连通的，因此对于 n 维的奇异单形，只存在如下两种

$$\sigma_{a_0} : \Delta_n \to \{a_0\}$$
$$\sigma_{a_1} : \Delta_n \to \{a_1\}$$

从而每一个链群 C_q 都是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，并且边缘同态为

$$\partial_q = \begin{cases} \mathrm{id} \oplus \mathrm{id}, & q\text{是偶数} \\ 0, & q\text{是奇数} \end{cases}$$

从而有如下的序列：

$$\cdots \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}\oplus\mathrm{id}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}_{2\text{维}} \xrightarrow{\mathrm{id}\oplus\mathrm{id}} \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}_{1\text{维}} \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}_{0\text{维}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

从而 $\widetilde{H}_q(A) = 0, q > 0$，而当 0 维时，我们有

$$\widetilde{H}_0(A) = \ker\varepsilon = [a_1 - a_0]$$

□

1.3.4 奇异同调的同伦不变性

定义 1.3.12 (同伦映射)**.** 映射 $f : X \to Y, g : X \to Y$ 称为同伦的，如果存在映射 $F : X \times I \to Y$，使得 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$，记作 $f \simeq g$

定义 1.3.13 (同伦等价)**.** 两个拓扑空间 X, Y 称为同伦等价，或者是有相同的同伦型，如果存在映射 $f : X \to Y, g : Y \to X$，使得 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$，$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$

定义 1.3.14 (可缩空间). 拓扑空间 X 称为是可缩的，如果它与单点集有相同的同伦型。

定义 1.3.15 (收缩形变核). 拓扑空间 X 的子空间 A 称为是 X 的收缩形变核[2]，如果存在收缩 $r : X \to A$[3]，使得 $i \circ r$ 同伦于 id_X，并且同伦的过程中固定 A[4]，其中 $i : A \to X$ 是嵌入。

例 1.3.3. S^n 是 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 的收缩形变核。

定理 1.3.2 (同伦不变性). 假定 $f \simeq g$ 是同伦的映射，则 $f_\# \simeq g_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ 是链同伦的，因而诱导相同的同调群同态。

注 1.3.6. 在奇异同调的框架下，同调群的同伦不变性的证明过于繁琐以及极具构造性，这里略过证明。在之后我们会在微分同调的观点下给出一个相对简单的证明。

推论 1.3.3 (同伦型不变性). 设拓扑空间 X, Y 有相同的同伦型 $X \simeq Y$，则它们的同调群同构。

推论 1.3.4. 设拓扑空间 X 的子空间 A 是 X 的收缩形变核，则嵌入映射 $i : A \to X$ 诱导了同调群的同构。

1.3.5 与基本群的关系

定义 1.3.16 (基本群). X 是拓扑空间，$x_0 \in X$ 是取定的基点，则 X 的基本群为

$$\pi_1(X, x_0) = \{\gamma\text{的同伦类} \mid \gamma\text{是 } x_0 \text{ 处的闭路}\}$$

如果我们将 $[0, 1]$ 等同于 1 维标准单形，则 X 中的每条道路都是 X 中的 1 维奇异单形，若 γ 是闭道路，则 γ 是闭链，因此 $H_1(X)$ 关心的也是 X 中的闭路的情况。以 $[\gamma]_h \in H_1(X)$ 表示 γ 代表的同调类，$[\gamma]$ 代表 γ 的同伦类。

易知

$$[\gamma\gamma']_h = [\gamma]_h + [\gamma']_h$$

故我们有同态：

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$$

定义为 $[\gamma] \mapsto [\gamma]_h$，称为 *Hurewicz* 同态。

定理 1.3.3. 假设拓扑空间 X 道路连通，则 *Hurewicz* 同态是满同态，并且 $\ker h_*$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的换位子群，即 $H_1(X)$ 就是 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化。

[2]这里的定义有时也被称为强形变收缩核

[3]映射 $r : X \to A$ 被称为收缩，如果 $r \circ i = \mathrm{id}_A$

[4]这意味着同伦 $F : X \times I \to X$ 满足对于任意的 $t \in I, F(a, t) = a, \forall a \in A$

1.3.6 $\mathcal{U}$ 小奇异链

定义 1.3.17 ($\mathcal{U}$ 小奇异链). X 是拓扑空间, $\mathcal{U}$ 是 X 的覆盖, 奇异单形 $\sigma:\Delta_q\to X$ 被称为 $\mathcal{U}$-小的, 如果 $\sigma(\Delta_q)\subset U\in\mathcal{U}$。

约定 1.3.1. 记 $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ 是由以所有 $\mathcal{U}$-小奇异单形为基生成的自由阿贝尔群, 是 $S_*(X)$ 的子链复形。

定理 1.3.4. 假设 $\mathrm{Int}\,\mathcal{U}=\{\mathring{U}\mid U\in\mathcal{U}\}$ 是 X 的开覆盖, 则存在链映射 $k:S_*(X)\to S_*^{\mathcal{U}}(X)$ 满足 $k\circ i=\mathrm{id}, i\circ k\cong\mathrm{id}$, 从而含入映射诱导出同调群的同构。

1.4 Mayer-Vietoris 序列

1.4.1 同调代数工具

定义 1.4.1 (正合列). 阿贝尔群同态 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 在 B 处正合, 如果 $\ker g=\mathrm{im}\,f$; 阿贝尔群同态序列 $\cdots\to G_{i-1}\xrightarrow{\phi_{i-1}}G_i\xrightarrow{\phi_i}G_{i+1}\to\dots$ 被称为正合列, 如果在每一个 G_i 处都正合。

定理 1.4.1 (Zig-Zag 引理). 链复形和链映射的长正合列 $0\to C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E\to 0$ 诱导了同调群间的长正合列

$$\cdots\xrightarrow{\partial_*}H_q(C)\xrightarrow{f_*}H_q(D)\xrightarrow{g_*}H_q(E)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(C)\to\dots$$

证明. 首先 f_*,g_* 都是链复形的链映射自然的诱导的同调群之间的态射, 下面我们定义 ∂_*, 考虑下面的交换图表:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & D_{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & E_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & D_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & E_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & D_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & E_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

任取 $z\in E_q$ 是一个闭链, 由于 g_q 是满射因此可以考虑 $g_q^{-1}(z)$, 并通过 ∂_q 映到 D_{q-1}, 由于 $g_{q-1}\partial_q(g_q^{-1}(z))=\partial_q(z)=0$, 因此 $\partial_q(g_q^{-1}(z))\in\ker g_{q-1}=\mathrm{im}\,f_{q-1}$, 并且由于

$$f_{q-2}\partial_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)=\partial_{q-1}\partial_q g_q^{-1}(z)=0$$

以及 f_{q-2} 是单射可知 $\partial_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)=0$，因此 $f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)$ 是 C_{q-1} 中的闭链，因此可以定义

$$\partial_*([z]) := [f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)]$$

在这里，我们需要小心验证以下的事实：

(1) 定义不依赖于 z 这个同调类代表元的选取；

(2) 定义不依赖于 $g_q^{-1}(z)$ 的选取；

我们依次如下验证：

(1) 如果将 z 改成 $z+\partial_{q+1}a, a\in E_{q+1}$，则

$$\partial_q g_q^{-1}(z+\partial_{q+1}a)=\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q g_q^{-1}\partial_{q+1}(a)=\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q\partial_{q+1}g_{q+1}^{-1}(a)=\partial_q g_q^{-1}(z)$$

即与同调类代表元选取无关。

(2) 由于 z 在 g_q^{-1} 下的任何两个原像只相差一个 $\operatorname{im} f_q$ 中的元素，我们不妨假设将 $g_q^{-1}(z)$ 换成 $g_q^{-1}(z)+f(a), a\in C_q$，则

$$f_{q-1}^{-1}\partial_q(g_q^{-1}(z)+f_q(a))=f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)+f_{q-1}^{-1}\partial_q f_q(a)=f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(z)+\partial_q(a)$$

因此更换 $g_q^{-1}(z)$ 的原像将会得到落在同一个同调类中的元素，因此定义不依赖于 $g_q^{-1}(z)$ 的选取。

因此，∂_* 的定义是良好的。 □

定理 1.4.2 (同调序列的自然性)**.** 设有链复形与链映射交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

则有下面的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & H_{q+1}(E) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C) & \xrightarrow{f_*} & H_q(D) & \xrightarrow{g_*} & H_q(E) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_*} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_*} & & & & \\
\dots & \longrightarrow & H_{q+1}(E') & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_q(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_q(E') & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

引理 1.4.1 (五引理)**.** 设有阿贝尔群的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & A_3 & \xrightarrow{\phi_3} & A_4 & \xrightarrow{\phi_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\
B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5
\end{array}$$

其中两个横行都是正合列，如果 f_1, f_2, f_4, f_5 都是同构，则 f_3 也是同构。

证明. 图上追踪。 □

注 1.4.1. 实际上，只需要 f_1, f_2, f_4 是满射，$f_2.f_4, f_5$ 是单射。

定义 1.4.2 (列正合)**.** 阿贝尔群同态的正合列 $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ 称为裂正合的，如果 $f(C)$ 是 D 的直和项，即 D 能分解成 $f(C)$ 和某个子群的直和。

注 1.4.2. 短正合列是列正合列的等价于 $D \cong C \oplus E$，因为如果 $D \cong C \oplus E$，由于 f 是单射自然有 $f(C)$ 是 D 的直和项；而如果 $f(C)$ 是 D 的直和项，那么我们不妨写成 $D = f(C) \oplus E'$，因此

$$E' \cong D/\operatorname{im} f \cong D/\ker g \cong E$$

即 $D \cong C \oplus E$.

命题 1.4.1. 对于阿贝尔群同态的短正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$，下列叙述等价：

1. 存在同态 $h : D \to C$，使得 $h \circ f = \mathrm{id}_C$
2. 存在同态 $k : E \to D$，使得 $g \circ k = \mathrm{id}_E$
3. 短正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ 是裂正合的。

特别的，若 E 是自由阿贝尔群[5]，则 1,2,3 成立。

证明. 如果短正合列是正合的，那么 (1),(2) 是显然成立的，取 $C \oplus E$ 的到每个分量的投射即可。

下面证明 (1) → (3)，首先注意到 $D = \operatorname{im} f + \ker h$，这是因为任取 $x \in D$，我们有如下分解

$$x = (x - fh(x)) + fh(x)$$

后者显然在 $\operatorname{im} f$ 中，然而前者在 $\ker h$ 中只需要做如下验算

$$h(x - fh(x)) = h(x) - hfh(x) = h(x) - h(x) = 0$$

下面证明 $\operatorname{im} f \cap \ker h = 0$，若存在 $c \in C$ 使得 $f(c) = d$ 以及 $h(d) = 0$，那么 $c = hf(c) = h(d) = 0$，因此 $D = \operatorname{im} f \oplus \ker h$，即该短正合列分裂。

下面证明 (2) → (3)，论证的方式与上面类似，同样注意到 $D = \ker g + \operatorname{im} k$，这是因为任取 $x \in D$，我们有如下的分解

$$x = (x - kg(x)) + kg(x)$$

[5]更一般的，E 是投射的，或 C 是内射的即可。

后者显然在 $\operatorname{im} k$ 中，然而前者在 $\ker g$ 中只需要做如下验算

$$g(x - kg(x)) = g(x) - gkg(x) = g(x) - g(x) = 0$$

下面证明 $\operatorname{im} k \cap \ker g = 0$，若存在 $d \in D$ 使得 $d = k(e)$，并且满足 $g(d) = 0$，那么 $0 = g(d) = gk(e) = e$，因此交平凡，即 $D = \ker g \oplus \operatorname{im} k = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} k$，即该短正合列分裂。 □

1.4.2 Mayer-Vietoris 序列

我们先来考虑下面的情况：X 是拓扑空间，X_1, X_2 是 X 的子空间，使得 $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ 是 X 的一个覆盖，则

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X_1) + S_*(X_2)$$

我们考虑下面的图表：

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\ X_1 \cap X_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X_1 \cup X_2 \\ & X_2 \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

则可以得到链复形与链映射的短正合列

$$0 \to S_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_\#} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \xrightarrow{k_\#} S_*(X_1) + S_*(X_2) \to 0$$

其中 $h_\#(x) := (i_{1\#}(x), -i_{2\#}(x)), k_\#(x) := j_{1\#}(y) + j_{2\#}(z)$

定义 1.4.3 (Mayer-Vietoris 耦)**.** 设 X_1, X_2 是 X 的子空间，满足含入映射 $i : S_*(X_1) + S_*(X_2) \to S_*(X_1 \cup X_2)$ 诱导了同调群的同构，则称 (X_1, X_2) 是一个 Mayer-Vietoris 耦。

例 1.4.1. 若 $\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 = X$，则 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。因为此时 $S_*(X_1) + S_*(X_2) = S_*^{\mathcal{U}}(X)$，根据定理 1.3.4，可知 $S_*^{\mathcal{U}}(X) \cong S_*(X) = S_*(X_1 \cup X_2)$

定理 1.4.3 (Mayer-Vietoris 序列)**.** 设 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。则存在长正合列

$$\cdots \to H_q(X_1 \cap X_2) \overset{-}{\to} H_1(X_1) \oplus H_2(X_2) \overset{+}{\to} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \to \dots$$

证明. 短正合列诱导长正合列。 □

注 1.4.3. 对增广链复形，同样有短正合列

$$0 \to \widetilde{S}_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_\#} \widetilde{S}_*(X_1) \oplus \widetilde{S}_*(X_2) \xrightarrow{k_\#} \widetilde{S}_*(X_1) + \widetilde{S}_*(X_2) \to 0$$

因此也有简约同调群的 Mayer-Vietoris 序列。

注 1.4.4. $\partial_* : H_q(X_1 \cup X_2) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ 的具体形式：任取 $[z] \in H_q(X_1 \cup X_2)$，由于 Mayer-Vietoris 耦的原因，$[z]$ 一定有一个代表闭链可以写成 $x_1 + x_2$，其中 x_1 是 X_2 中的链，x_2 是 X_2 中的链。由于 $\partial z = \partial x_1 + \partial x_2 = 0$，则 $\partial x_1 = -\partial x_2$，记作 y，是 $X_1 \cap X_2$ 中的闭链，它代表了 $H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ 中的同调类，即

$$\partial_*([z]) = [y]$$

定理 1.4.4 (Mayer-Vietoris 序列的自然性)**.** 设 $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\}$ 是 X, Y 中的 Mayer-Vietoris 耦，映射 $f : X \to Y$ 满足 $f(X_1) \subset Y_1, f(X_2) \subset Y_2$，则有正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to H_{q+1}(X_1 \cup X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{-} & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) & \xrightarrow{+} & H_q(X_1 \cup X_2) \to \dots \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
\cdots \to H_{q+1}(Y_1 \cup Y_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(Y_1 \cap Y_2) & \xrightarrow{-} & H_q(Y_1) \oplus H_q(Y_2) & \xrightarrow{+'} & H_q(Y_1 \cup Y_2) \to \dots
\end{array}$$

例 1.4.1 利用 $\mathcal{U}$-小奇异链的性质给出了一种 Mayer-Vietoris 耦，但是通常在计算中，我们会选择闭集作为 Mayer-Vietoris 耦，下面的定理给出了两个闭子空间组成的集合什么时候是一个 Mayer-Vietoris 耦的判断方法：

命题 1.4.2. 如果拓扑空间 $X = X_1 \cup X_2$，X_1, X_2 是闭子空间，且 $X_1 \cap X_2$ 是某个开邻域的形变收缩核，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦

证明. 记 $X_1 \cap X_2$ 的开邻域 V 以及 $F : V \times I \to V$ 是形变收缩同伦，记 $V_i = X_i \cup V, i = 1, 2$，显然 $\{V_1, V_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦。

我们断言：对于 $i = 1, 2$，V_i 可形变收缩到 X_i，定义

$$F_i(x,t) = \begin{cases} x, & x \in X_i \\ F(x,t), & x \in V \backslash X_i \end{cases}$$

根据 Mayer-Vietoris 序列则有

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \longrightarrow & H_q(V) & \longrightarrow & H_q(V_1) \oplus H_q(V_2) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_{q-1}(V) & \longrightarrow \dots \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\dots \longrightarrow & H_q(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) & \longrightarrow & H_q(S_*^{\mathcal{U}}(X)) & \longrightarrow & H_{q-1}(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow \dots
\end{array}$$

根据五引理可知虚线是一个同构，即 $\{X_1, X_2\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。 □

利用命题 1.4.2，我们计算高维球面的简约同调群，这是我们第一个不平凡的例子。

例 1.4.2. 当 $n \geq 0$ 时，有球面的同调群为

$$\widetilde{H_q}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. 令 $B_+ = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}, B_- = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$，则 $B_+ \cap B_- = S^{n-1}$ 是其某个开邻域的收缩形变核，则 $\{B_+, B_-\}$ 是一个 Mayer-Vietoris 耦。而 B_+, B_- 都同胚与 D^{n-1}，是一个可缩空间，则其各个维数的简约同调群为零，利用简约同调群的 Mayer-Vietoris 序列则有

$$\dots \to 0 \xrightarrow{+} \widetilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{-} 0 \xrightarrow{+} \widetilde{H}_{q-1}(S^n) \to \dots$$

因此可以得到

$$\widetilde{H}_q(S^n) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong \widetilde{H}_{q-n}(S^0)$$

利用两点空间的简约同调群可以得到我们期待的结果。 □

1.5 插曲：微分上同调

1.5.1 de Rham 上同调

在本节中[6]，为了简洁起见，仅从形式上的定义微分形式，而不深究其背后的代数原理。

取开集 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，并取坐标 $x = (x^1, \dots, x^n)$，则其上的微分形式如下

$$\begin{aligned}
\Omega^0(D) &= \{f \in C^\infty(D)\} \\
\Omega^1(D) &= \{\sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}x^i \mid f_i \in C^\infty(D)\} \\
\Omega^2(D) &= \{\sum_{1 \leq i < j \leq n}^n f_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \mid f_{ij} \in C^\infty(D)\} \\
&\vdots \\
\Omega^n(D) &= \{f \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n \mid f \in C^\infty(D)\}
\end{aligned}$$

规定大于 n 次以及小于 0 次的微分形式都是零，并且

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

[6] 关于这部分材料，详见 GTM82

令 $\Omega^*(D)=\bigoplus_{i=1}^n\Omega^i(D)$，则 $(\Omega^*,\wedge)$ 构成了一个外代数。满足任取 $\omega\in\Omega^p(D),\eta\in\Omega^q(D)$，则

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\omega$$

在微分形式上定义外微分运算 $d:\Omega^k(D)\to\Omega^{k+1}(D)$ 如下

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f&=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\\ \mathrm{d}(\sum_{i=1}^n f_i\mathrm{d}x^i)&=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}f_i\wedge\mathrm{d}x^i=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\\ &\vdots\end{aligned}$$

做 $\mathbb{R}$-线性扩张即可得到 $\Omega^k(D)\to\Omega^{k+1}(D)$ 的映射，并且容易验证，$\mathrm{d}^2=0$，因此得到了如下的微分复形

$$0\to\Omega^0(D)\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^1(D)\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^1(D)\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^2(D)\xrightarrow{\mathrm{d}}\dots$$

并且可以定义该微分复形对应的上同调群[7]，记作 $H^*_{dR}(D,\mathbb{R})$ 如果不强调系数，有时也省略做 $H^*_{dR}(D)$。

例 1.5.1. 我们下面计算 $H^0_{dR}(D,\mathbb{R})$ 如下

$$\begin{aligned}H^0_{dR}(D)&=\ker(d:\Omega^0(D)\to\Omega^1(D))\\ &=\{f\in C^\infty(D)\mid\mathrm{d}f=0\}\end{aligned}$$

因此

$$H^0_{dR}(D,\mathbb{R})=\underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{D\text{ 的连通分支的个数}}$$

1.5.2 Stokes 公式

回忆在微积分中所学过的如下公式

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \iint_{\partial D}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iiint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ \int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+Q\mathrm{d}z&=\iint_D(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

注意到，如果我们记

$$\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

[7]由于随着边缘同态的作用指标在上升，因此这种同调群一般称作上同调群，以与之前的同调群作区分。

那么根据外微分的运算则有

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y) = (\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}y = (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

类似上面的运算，可以发现后两个公式也有相同的结果，实际上，它们都是下面公式的特殊形式

定理 1.5.1 (Stokes 公式)**.** D 是 r 维边界分片光滑的区域，ω 是 $r-1$ 次微分形式，则

$$\int_{\partial D}\omega = \int_D \mathrm{d}\omega$$

注 1.5.1. 上面的等式也可以写成

$$\langle \partial D, \omega\rangle = \langle D, \mathrm{d}\omega\rangle$$

即 ∂ 与 d 构成对偶。

1.5.3 de Rham 上同调的函子性

取 $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n, D_2 \subseteq \mathbb{R}^m$，以及 D_1 的坐标 $(y^1,\dots,y^n)$，D_2 的坐标 $(x^1,\dots,x^m)$，我们定义切向量的推出

$$f_*(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial f^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

设 $\omega = \sum_{i_1,\dots,i_r}\varphi_{i_1\dots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\mathrm{d}x^{i_r}$，则定义微分形式的拉回为

$$f^*(\omega) = \sum_{\alpha_1\dots\alpha_r}\varphi_{i_1\dots i_r}\circ f\frac{\partial f^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}}\dots\frac{\partial f^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}}\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}y^{i_r}$$

并且我们断言 f^* 保持外积以及与外微分交换，即

$$\begin{cases} f^*(\omega\wedge\eta) = f^*(\omega)\wedge f^*(\eta) \\ f^*\circ\mathrm{d} = \mathrm{d}\circ f^* \end{cases}$$

因此微分形式的拉回

$$f^*: \Omega^*(D_2) \to \Omega^*(D_1)$$

诱导了 de Rham 上同调群之间的态射，即 H^*_{dR} 是一个反变函子。

1.5.4 de Rham 上同调中的 Mayer-Vietoris 序列

取 U_1, U_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$U = U_1\cup U_2$，则有

$$
\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\
U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & & U_1 \cup U_2 = U \\
 & U_2 \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

命题 1.5.1. 根据上面的图表，对任意的 p，我们有下面的短正合列

$$0 \to \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

其中

$$I^p(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$$
$$J^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$$

证明. 关键证明 J^p 是满射，不妨考虑 $p = 0$ 的情形，其余情况类似。取从属于 $\{U_1, U_2\}$ 的单位分解 $\{\rho_1, \rho_2\}$，则任取 $f \in C^\infty(U_1 \cap U_2)$，考虑 $f_1 = \rho_2 f \in C^\infty(U_1), -\rho_1 f \in C^\infty(U_2)$[8]，则

$$f = \rho_2 f - (-\rho_1 f) = (\rho_1 + \rho_2) f = f$$

□

推论 1.5.1. 上述微分复形的短正合列诱导了 de Rham 上同调群的长正合列，即 Mayer-Vietoris 序列。

$$\cdots \to H_{dR}^p(U) \xrightarrow{+} H_{dR}^p(U_1) \oplus H_{dR}^p(U_2) \xrightarrow{-} H_{dR}^q(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H_{dR}^{q+1}(U) \to \dots$$

注 1.5.2. 这里我们搞明白 d^* 对理解是十分有帮助的[9]，通过具体进行追图操作，我们可以发现 d^* 可以显式的写成：

$$\mathrm{d}^*([\omega]) = \begin{cases} -\mathrm{d}(\rho_V \omega), & \text{在 } U \text{ 上} \\ \mathrm{d}(\rho_U \omega), & \text{在 } V \text{ 上} \end{cases}$$

例 1.5.2. 证明 $H_{dR}^2(\mathbb{R}^2) = 0$

证明. 这实际是 Poincaré 引理的特殊结果，我们对于这个例子进行具体的构造：任取 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 中的一个闭的 2-形式 $\omega = g\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，我们直接构造一个 1-形式 $\eta = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y$，使得 $\omega = \mathrm{d}\eta$。由于：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta &= \mathrm{d}(f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y) \\ &= ((f_2)_x - (f_1)_y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{aligned}$$

---

[8] 思考：为什么不选取 $f_1 = \rho_1 f, f_2 = -\rho_2 f$?

[9] One of hallmarks of a topologist is a sound intuition of d^*

即我们需要构造 f_1, f_2 使得

$$(f_2)_x - (f_1)_y = g$$

而这是非常容易的，只需令 $f_1 \equiv 0$，以及

$$f_2 = \int_a^x g(t, y)\mathrm{d}t$$

即可。 □

命题 1.5.2. 开子集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 可以被有限个凸开子集覆盖，则 $H^*_{dR}(U)$ 是有限维的。

证明. 对 U 的凸开子集的个数 r 进行归纳，当 $r = 1$ 时根据 Poincaré 引理即可。假设 $r < k$ 时都成立，那么考虑 $r = k$ 时，假设 $\{U_1, \ldots, U_k\}$ 是 U 的一个凸开覆盖，考虑 $V = \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i$，则 $U = V \cup U_n$。根据 Mayer-Vietoris 序列，我们有

$$\cdots \to H^{q-1}(V \cap U_n) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^p(U) \to H^p(V) \oplus H^p(U_n) \to \ldots$$

而根据归纳假设，$H^{q-1}(V \cap U_n), H^p(V), H^p(U_n)$ 都是有限维的，再根据正合性可知 $H^p(U)$ 是有限维的，即归纳成立。 □

1.5.5 流形上的 de Rham 上同调

在上面的过程中，我们实际上都是在处理欧式空间中的对象，更一般的来说，可以考虑光滑流形上的 de Rham 上同调。很多结果都是平行的，因为微分实际上是一种局部性质，而流形正是那些局部平凡的对象。

由于光滑流形 M 在局部上微分同胚与欧式空间中的开集，因此我们可以在 M 的坐标卡上定义微分形式，并且要求其与坐标卡相容得到整体上的微分形式。同样其上存在一个外微分算子 d，与微分形式一起组成了一个 de Rham 复形，因此可以定义 M 上的 de Rham 上同调群。

并且光滑流形之间的光滑映射会诱导微分形式的拉回，并且与外微分算子交换，就如同在局部时一样。因此将会诱导了 de Rham 复形之间的链映射，进而诱导上同调群之间的映射，因而 de Rham 上同调仍然具有函子性。

推论 1.5.2. 微分同胚的光滑流形具有同构的 de Rham 上同调群。

下面我们将定义上同调群的卡积[10]，这是上同调优于同调的一个具体体现[11]

定义 1.5.1 (卡积)**.** 我们定义

$$\begin{aligned} H^r_{dR}(M) \times H^s_{dR}(M) &\to H^{r+s}_{dR}(M) \\ ([\xi], [\eta]) &\mapsto [\xi \wedge \eta] \end{aligned}$$

[10]在之后讲述奇异上同调时，我们也会介绍奇异上同调的卡积，但是在微分上同调意义下卡积有着更加直观的定义，就是通过微分形式的外积来定义。

[11]这将给出我们更多的信息，如果两个光滑流形微分同胚，那么它们的 de Rham 上同调群不仅要同构，而且我们将要赋予的环结构，也应该是相同的。

注 1.5.3. 上述定义确实是良定义的，因为设 $\xi' = \xi + \mathrm{d}\zeta$，则

$$\xi' \wedge \eta - \xi \wedge \eta = (\xi' - \xi) \wedge \eta = \mathrm{d}\zeta \wedge \eta = \mathrm{d}(\zeta \wedge \eta)$$

注 1.5.4. 对于卡积来说，其满足交换律

$$[\xi] \cup [\eta] = (-1)^{rs}[\eta] \cup [\xi]$$

这实际上源于 $\xi \wedge \eta = (-1)^{rs}\eta \wedge \xi$，其中 $\xi \in \Omega^r(M), \eta \in \Omega^s(M)$。

卡积赋予了上同调群更加丰富的结构，即使得分次群上增加了乘法运算，使得其称为分次环

定义 1.5.2 (分次环)**.** 一个分次环 $R_* = \{R_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ 是一个分次群 R_*，以及一系列双线性乘法 $\mu_{p,q} : R_p \times R_q \to R_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$，简记作 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$，并且满足结合率以及存在单位元。

定义 1.5.3 (交换分次环)**.** 分次环 R_* 被称为交换的，如果

$$\alpha \cdot \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta \cdot \alpha$$

其中 $|\alpha|, |\beta|$ 分别表示 α, β 的次数。

定义 1.5.4 (分次环同态)**.** 分次环同态是指一个分次群同态，并且保持乘法以及乘法单位元。

例 1.5.3. de Rham 上同调群 $H^*_{dR}(M)$ 构成了一个交换分次环。光滑流形间的光滑映射诱导的上同调群之间的态射是分次环的同态。

推论 1.5.3. 微分同胚的光滑流形具有同构的上同调环结构。

1.5.6 de Rham 上同调的同伦不变性

引理 1.5.1. 记 $i_t : M \to M \times I$ 定义为 $x \mapsto (x, t)$，显然有 i_0 同伦于 i_1，则它们诱导的链复形之间的链映射 i_0^*, i_1^* 是链同伦的。即对任意的 p，存在 $T_p : \Omega^p(M \times I) \to \Omega^{p-1}(M)$，使得

$$T_{p-1}\mathrm{d} + \mathrm{d}T_p = i_1^* - i_0^*$$

证明. 任取 $x \in M$，以及任取 $\omega \in \Omega^p(M \times I)$，定义

$$(T_p\omega)_x(X_1, \ldots, X_{p-1}) := \int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega(X_1, \ldots, X_{p-1})\mathrm{d}t = \int_0^1 \omega(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \ldots, X_{p-1})\mathrm{d}t$$

下面我们验证这就是我们需要的链同伦：

注意到 $\omega \in \Omega^p(M \times I)$ 一定可以写成形如 $f(x,t)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}}$ 与 $g(x,t)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$ 的线性和，则只需要对这两种形式的 ω 验证即可。

当 $\omega = f(x,t)\mathrm{d}t\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}}$ 时，则计算：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(T_p\omega) &= \mathrm{d}((\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}}) \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}(\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}} \\
&= \sum_j(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}} \\
T_{p+1}(\mathrm{d}\omega) &= T_{p+1}(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}t\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}}) \\
&= -\sum_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{p-1}} \\
&= -\mathrm{d}(T_p\omega)
\end{aligned}
$$

而 $i_0^*\omega = i_1^*\omega = 0$，因此对于第一种情况是成立的。

当 $\omega = f(x,t)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p}$，则 $\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega = 0$，因此 $\mathrm{d}(T_p\omega) = 0$；而另一方面：

$$
\begin{aligned}
T_{p+1}(\mathrm{d}\omega) &= T_{p+1}(\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p} + \dots) \\
&= (\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\
&= (f(x,1) - f(x,0))\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\
&= i_1^*\omega - i_0^*\omega
\end{aligned}
$$

□

命题 1.5.3. f, g 是光滑流形 $M\to N$ 的光滑同伦,则 $f^* = g^*$ 是相同的从 $H^*_{dR}(M)\to H^*_{dR}(N)$ 的映射。

证明. 只需证明 f^* 与 g^* 是链同伦的链映射即可。设 $H: M\times I\to N$ 是 f 和 g 的光滑同伦，即 $H\circ i_0 = f, H\circ i_1 = g$，则

$$
\begin{aligned}
f^* &= i_0^*\circ H^* \\
g^* &= i_1^*\circ H^*
\end{aligned}
$$

而 $i_0^*\cong i_1^*$，两式消去即有 $f^*\cong g^*$。 □

定义 1.5.5. 设 $f: M\to N$ 是连续函数，任取[12]光滑函数 $F: M\to N$，使得 f 连续同伦于 F，我们定义

$$f^* := F^*: H^*_{dR}(N)\to H^*_{dR}(M)$$

[12]这样的光滑函数确确实实是存在的，这就是逼近定理

注 1.5.5. 我们要说明 f^* 不依赖于 F 的选取，而这是显然的，因为任取 G 是光滑映射，使得 f 同伦于 G，那么根据传递性，F 连续同伦于 G，而根据下面的引理，实际上有 F 光滑同伦于 G。因此 f^* 不依赖于 F 的选取。

引理 1.5.2. 如果 F, G 是两个光滑函数，并且 F 与 G 连续同伦，那么必然有 F 与 G 光滑同伦。

命题 1.5.4 (de Rham 上同调的同伦不变性)**.** 有相同伦型的光滑流形有着相同的 de Rham 上同调群。

推论 1.5.4 (Poincaré 引理)**.** 若 M 可缩，则有

$$H^p_{dR}(M) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R}, & p = 0 \end{cases}$$

证明. 注意到 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 有相同的伦型，因此有

$$H^p_{dR}(\mathbb{R}^n) = H^p_{dR}(\mathbb{R}^{n-1}) = \cdots = H^p_{dR}(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R}, & p = 0 \end{cases}$$

□

推论 1.5.5. 同胚的光滑流形有着相同的 de Rham 上同调群。

证明. 同胚的光滑流形自然有相同的伦型。 □

例 1.5.4. 计算 $H^*_{dR}(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})$ 如下：我们取 $U_1 = \mathbb{R}^2 \backslash [0, +\infty), U_2 = \mathbb{R}^2 \backslash (-\infty, 0]$。则

$$H^q_{dR}(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & q = 0 \end{cases}, \quad H^q_{dR}(U_1) \oplus H^q_{dR}(U_2) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & q = 0 \end{cases}$$

因此根据 Mayer-Vietoris 序列，当 $p > 0$ 时有

$$0 \to H^p_{dR}(U_1 \cap U_2) \to H^{p+1}_{dR}(U_1 \cup U_2) \to 0$$

即 $p \geq 2$ 时，有 $H^q_{dR}(U_1 \cup U_2) = 0$

而当 $p = 0$ 时，有

$$0 \to H^0_{dR}(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{I^*} H^0_{dR}(U_1) \oplus H^0_{dR}(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0_{dR}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^1_{dR}(U_1 \cup U_2) \to 0$$

我们可以直接计算

$$H^1_{dR}(U_1 \cup U_2) = H^0_{dR}(U_1 \cap U_2) / \operatorname{im} J^* = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} / \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

例 1.5.5. 计算 S^n 的 de Rham 上同调群。

证明. 注意到 S^n 与 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0,\dots,0\}$ 有相同的伦型，而 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 的上同调群可以利用与上例完全一致的证明方式来证明。 □

例 1.5.6. 当 $m \neq n$ 时，$\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 不同胚。

证明. 根据 Poincaré 引理得到它们的 de Rham 上同调群不同构。 □

定义 1.5.6 (good cover). 光滑流形 M 的一个开覆盖 $\{U_i\}$ 被称为一个好覆盖[13]，如果任意有限交那么空，要么同胚于 $\mathbb{R}^n$。

命题 1.5.5. 若光滑流形 M 存在一个有限的好覆盖，则 $H^*_{dR}(M)$ 是有限维的。

证明. 同命题 1.5.2 □

定理 1.5.2 (Poincaré 对偶). M 是 n 维可定向紧流形，则有同构

$$H^k_{dR}(M) \cong H^{n-k}_{dR}(M), \quad \forall 0 \le k \le n$$

证明. 由于 M 上存在好覆盖，则 $H^*_{dR}(M)$ 都是有限维的。我们考虑下面的配对

$$\begin{aligned} H^k_{dR}(M) \times H^{n-k}_{dR}(M) &\to \mathbb{R} \\ ([\xi],[\eta]) &\mapsto \int_M \xi \wedge \eta \end{aligned}$$

这个配对是良定义的非退化的双线性型，这样的双线性型直接导致了 Poincaré 对偶。 □

推论 1.5.6. $\dim H^k_{dR}(M) = \dim H^{n-k}_{dR}(M), 0 \le k \le n$，即 M 的第 k 个 Betti 数和第 $n-k$ 个 Betti 数是相同的。

定义 1.5.7 (Euler 示性数). M 的欧拉示性数定义为

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i_{dR}(M)$$

推论 1.5.7. M 是奇数维可定向紧流形，则 $\chi(M) = 0$

推论 1.5.8. M 是连通的 n 维可定向紧流形，则 $H^n_{dR}(M) = \mathbb{R}$

[13]这样的覆盖总是存在的，需要借助一些黎曼几何的工具，在其上赋予一个黎曼度量，再考虑测地凸邻域。

1.5.7 微分上同调的一些应用

本节中，为了符号的简洁，省略 de Rham 上同调群 $H^*_{dR}(X)$ 的下标，简记作 $H^*(X)$[14]。

定理 1.5.3. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意真闭子集 A，有同构

$$\begin{aligned}
&H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) = H^p(\mathbb{R}^n\backslash A), \quad \forall p \geq 1\\
&H^1(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) = H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\mathbb{R}\\
&H^0(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) = \mathbb{R}
\end{aligned}$$

证明. 令 $U_1 = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \cup (\mathbb{R}^n\backslash A) \times (-1, +\infty)$，以及 U_2 是 U_1 关于 $\mathbb{R}^n$ 的对称，则 $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1}\backslash A$，以及 $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n\backslash A) \times (-1, 1)$，则显然有下面的结果：

1. U_1, U_2 可缩；
2. $U_1 \cap U_2$ 同伦等价于 $\mathbb{R}^n\backslash A$

利用 de Rham 上同调的 Mayer-Vietoris 序列，我们有

$$\cdots \to H^p(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \to H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \to H^p(\mathbb{R}^n\backslash A) \to H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \to H^{p+1}(U_1) \oplus H^{p+1}(U_2) \to \dots$$

当 $p \geq 1$ 时，我们有 $H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) = 0$，从而

$$H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) = H^p(\mathbb{R}^n\backslash A)$$

而当 $p = 0$ 时，我们有 $H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$，从而

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f} H^0(\mathbb{R}^n\backslash A) \xrightarrow{g} H^1(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \to 0$$

从而

$$\begin{aligned}
H^1(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) &= H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\ker g\\
&= H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\operatorname{im} f\\
&= H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R})\\
&= H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\mathbb{R}
\end{aligned}$$

□

推论 1.5.9. 当 $n \geq 2$ 时，我们有

$$H^p(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, n-1\\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

[14]实际上，这也是有道理的，因为我们目前只接触到了一种上同调理论，去掉下标并不会导致混淆；并且当我们介绍了奇异上同调后，德拉姆定理告诉我们 de Rham 上同调群与 $\mathbb{R}$ 系数的奇异上同调群是同构的，因此亦不需要加以区分。

证明. 取 $A=\{0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的真闭子集。 □

利用上面的结果，实际上可以得到许多非常深刻的定理。第一个重要的应用则是 Brouwer 不动点定理。

定理 1.5.4 (Brouwer 不动点定理)**.** *若 $f: D^n \to D^n$ 是连续函数，其中 $D=\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$，则 f 必存在不动点。*

证明. 设 $f(x) \neq x, \forall x \in D^n$，则构造 $g(x): D^n \to S^n$，其中 $g(x)$ 为从 $f(x)$ 连接 x 的射线与 S^n 的交点，显然 $g(x)$ 连续，并且 $g(x)|_{S^n} = \mathrm{id}_{S^n}$，考虑

$$S^{n-1} \xhookrightarrow{i} D^n \xrightarrow{g} S^{n-1}$$

则有 $g \circ i = \mathrm{id}_{S^n}$，则 $i^* \circ g^*: H^{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g^*} H^{n-1}(D^n) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(S^{n-1})$ 诱导了上同调群间的同构，但是 $H^{n-1}(D^n)=0$，矛盾。 □

另一个有趣的应用则是毛球定理,在后面我们将看到,毛球定理实际上是 Poincaré – Hopf 定理的一个特殊情况。

定理 1.5.5 (毛球定理)**.** *S^n 上存在连续的处处非零切向量场当且仅当 n 是奇数。*

在证明之前，我们先看如何构造奇数维的球面上一个连续的处处非零的切向量的一个例子：

例 1.5.7. *S^{2n+1} 上的处处非零的切向量场可以如下定义：$(x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1})$ 处的非零切向量可以定义为 $(-x_1, x_0, \ldots, -x_{2n+1}, x_{2n})$。*

下面我们给出毛球定理的证明

证明. 假设 S^n 上有一个连续的处处非零的切向量场 $v(x), x \in S^n$，下面我们只需要说明 n 是奇数。构造 $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ 上的一个连续切向量场为

$$w(x) = v(\frac{x}{\|x\|}), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$$

那么令 $F(x,t) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)w(x)$，实现了 $F(x,0) = \mathrm{id}$ 与 $F(x,1) = -\mathrm{id}$ 的同伦，因此

$$\mathrm{id}^* = f_1^*: H^n(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to H^n(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\})$$

但是对于 f_1^* 来说，我们可以写成其具体的形式如下：

$$\begin{aligned} f_1^*: H^n(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) &\to H^n(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) \\ [\xi] &\mapsto (-1)^{n+1}[\xi] \end{aligned}$$

因此 $n+1$ 是偶数，即 n 是奇数。 □

最后一步 f_1^* 的具体形式是由下面的引理保证的，因为 f_1 可以看成是线性变换 $-\mathrm{I}_{n+1}$。

引理 1.5.3. 如果 $n \geq 2$，并且 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}^n)$，记 $f_A : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 定义为 $x \mapsto Ax$，则 $f_A^* = \operatorname{sgn} |A|$

证明. 对 A 进行初等变换得到 $B = (I + cE_{r,s})A, c \in \mathbb{R}$，则有同伦 $f_A \simeq f_B$，因此 $f_A^* = f_B^*$，经过有限次初等变换后可以得到 $A = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, \operatorname{sgn} |A|\}$，因此可知 $f_A^* = \operatorname{sgn} |A|$。 □

第三个应用则是分离定理，特别地，当 $n = 2$ 时，就是 Jordan 闭曲线定理。

定理 1.5.6 (Jordan-Brouwer 分离定理)**.** 取 $\sum$ 同胚于 $S^{n-1}, \sum \subset \mathbb{R}^n$，则 $\mathbb{R}^n \backslash \sum$ 有两个连通分支 U_1, U_2，且其中 U_1 有界，U_2 无界，并且 $\partial U_1 = \partial U_2 = \sum$，并称 U_1 是 $\sum$ 的内部，U_2 是 $\sum$ 的外部。

为了证明这个定理，我们先做一些准备工作，下面的延拓定理是一个重要的工具，使得我们可以将闭子集上的同胚延拓到全空间上，因为 S^n 和与其同胚的 $\sum$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集。

引理 1.5.4 (Urysohn-Tietze 引理)**.** A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，$f : A \to \mathbb{R}^m$ 是连续函数，则存在连续延拓 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得 $g|_A = f$。

证明. 标准的点集拓扑结论。 □

引理 1.5.5. $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$，是闭子集，且 $\phi : A \to B$ 是同胚，则存在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 到自身的同胚 h 使得 $h(x, 0) = (0, \phi(x)), \forall x \in A$。

证明. 先将 ϕ 延拓成连续映射 $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，并且定义

$$\begin{aligned} h_1 : \mathbb{R}^{m+n} &\to \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, y) &\mapsto (x, y + f_1(x)) \end{aligned}$$

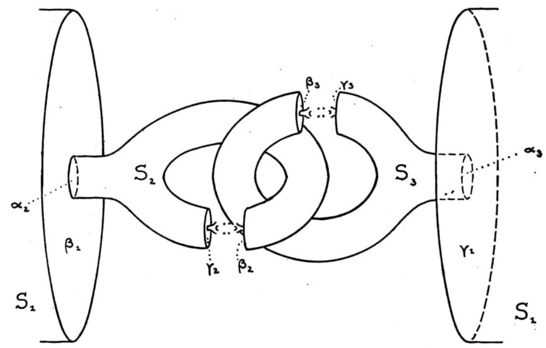
同理可以延拓 f^{-1} 成 $f_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，类似的定义

$$\begin{aligned} h_2 : \mathbb{R}^{m+n} &\to \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, y) &\mapsto (x + f_2(y), y) \end{aligned}$$

则定义 $h = h_2^{-1} \circ h_1$ 即可。 □

推论 1.5.10. A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集，$\phi : A \to B$ 是同胚，则 ϕ 可以扩张为同胚 $\widetilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$。

注 1.5.6. 上面的引理意味着 $\widetilde{\phi}:\mathbb{R}^{2n}\backslash A\to\mathbb{R}^{2n}\backslash B$ 是同胚！但一般而言，$\mathbb{R}^n\backslash A$ 与 $\mathbb{R}^n\backslash B$ 是不同胚的，例如 Alexander′s 角球（见下图）在 $\mathbb{R}^3$ 中同胚与 S^2，但是它们的补是不同胚的。



虽然补不一定同胚，但是我们有下面的结论：

定理 1.5.7. A,B 都是 $\mathbb{R}^n$ 的真闭子集，A,B 同胚，则 $H^k(\mathbb{R}^n\backslash A)=H^k(\mathbb{R}^n\backslash B),k\geq 0$

证明. 考虑定理 1.5.3，对 m 进行归纳可知对任意 $m\geq 1$，有

$$H^{k+m}(\mathbb{R}^{n+m}\backslash A)\cong H^k(\mathbb{R}^n\backslash A),\quad k\geq 1$$
$$H^m(\mathbb{R}^{n+m}\backslash A)\cong H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\mathbb{R}$$

由于 $\mathbb{R}^{2n}\backslash A$ 与 $\mathbb{R}^{2n}\backslash B$ 同胚，从而有

$$H^k(\mathbb{R}^n\backslash A)\cong H^{k+n}(\mathbb{R}^{2n}\backslash A)\cong H^{k+n}(\mathbb{R}^{2n}\backslash B)\cong H^k(\mathbb{R}^n\backslash B),\quad k\geq 1$$
$$H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\mathbb{R}\cong H^n(\mathbb{R}^{2n}\backslash A)\cong H^n(\mathbb{R}^{2n}\backslash B)\cong H^0(\mathbb{R}^n\backslash B)/\mathbb{R}$$

因而

$$H^*(\mathbb{R}^n\backslash A)\cong H^*(\mathbb{R}^n\backslash B)$$

□

推论 1.5.11. A,B 是 $\mathbb{R}^n$ 的真闭子集，则它们的补有相同的连通分支个数。

有了上面的准备，我们可以证明 Jordan-Brouwer 分离定理

证明. 由于 $\mathbb{R}^n\backslash S^{n-1}$ 有两个连通分支，因此 $\mathbb{R}^n\backslash\sum$ 也有两个连通分支。记 $\mathbb{R}^n\backslash S^{n-1}$ 的两个连通分支为 $\mathring{D}^n, W=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x\|>1\}$，取 $r=\max_{x\in\Sigma}\|x\|$，则 rW 连通，必含在 $\mathbb{R}^n\backslash\sum$ 的某个连通分支中，记作 U_2，则另一个连通分支必有界，记作 U_1。

下面证明 U_1,U_2 的边界都是 $\sum$，即证明任取 $p\in\sum$，对任意 p 的开邻域 V，V 中既存在 U_1 中的点也存在 U_2 中的点。定义 $A=\sum\backslash(\sum\cap V)$，则 A 是闭的，则 A 同胚于 S^{n-1} 的某个闭子集 B，则 $\mathbb{R}^n\backslash B$ 是连通的，从而 $\mathbb{R}^n\backslash A$ 连通。取 $p_1\in U_1,p_2\in U_2$，

以及连接 p_1,p_2 的连续曲线 γ,由第一部分的结果 γ 与 $\sum$ 必相交,即 $\gamma^{-1}(\sum)$ 非空,闭子集 $\gamma^{-1}(\sum)$ 必有第一个以及最后一个元素 c_1 和 c_2。$\gamma(c_1)\in\sum\cap V,\gamma(c_2)\in\sum\cap V$,那么存在 $\varepsilon>0$，使得 $\gamma(c_1-\varepsilon)\in V\cap U_1,\gamma(c_2+\varepsilon)\in V\cap U_2$。 □

推论 1.5.12. $A\subset\mathbb{R}^n$，且 A 同胚于 $D^k,0\le k\le n$，则 $\mathbb{R}^n\backslash A$ 连通。

定理 1.5.8 (Brouwer)**.** V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$f:U\to\mathbb{R}^n$ 是连续单射，则 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集，从而 f 是 U 到 $f(U)$ 的同胚。

证明. 任取 $f(x)\in f(U),x\in U$，取 x 的开邻域 V 使得其闭包 $\overline{V}\subset U$，$\overline{V}\cong D^n$ 且 $\partial V\cong S^{n=1}$。由于 $\overline{V}$ 是紧集，其上的单映射是同胚，因此 $h(\overline{V})\cong\overline{V}\cong D^n$，根据推论 1.5.12，有 $\mathbb{R}^n\backslash h(\overline{V})$ 是连通的，而显然 $h(V)$ 也是连通的，则观察分解

$$\mathbb{R}^n\backslash h(\partial V)=(\mathbb{R}^n\backslash h(\overline{V}))\cup h(V)$$

将 $\mathbb{R}^n\backslash h(\partial V)$ 分解成了两个连通的部分，根据分离定理的结果，这两个连通分支一定是开集，因此 $h(V)$ 是开集，从而 $h(x)$ 是内点。由于 $h(U)$ 的每一个点都是内点从而 $h(U)$ 是开集。 □

推论 1.5.13 (区域不变性原理)**.** $V\subset\mathbb{R}^n$，且 V 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的某个开子集，则 V 是开子集。

推论 1.5.14 (维数不变性原理)**.** $U\subset\mathbb{R}^n,V\subset\mathbb{R}^m$ 都是非空开子集，并且 U 同胚于 V，则 $m=n$。

例 1.5.8. $\mathbb{R}^3$ 中的纽结 K 指的是 $K\cong S^1$，则有

$$H^k(\mathbb{R}^3\backslash K)=\begin{cases}\mathbb{R}, & 0\le k\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

证明. 只需要考虑 $\mathbb{R}^3\backslash S^1$ 即可，而

$$H^k(\mathbb{R}^2\backslash S^1)=H^k(\mathring{D}^2)\oplus H^k(\mathbb{R}^2\backslash D^2)=\begin{cases}\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}, & k=0\\ \mathbb{R}, & k=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

再利用

$$H^{k+1}(\mathbb{R}^3\backslash S^1)\cong H^k(\mathbb{R}^2\backslash S^1),\quad\forall k\ge 1$$
$$H^1(\mathbb{R}^3\backslash S^1)\cong H^0(\mathbb{R}^2\backslash S^1)/\mathbb{R}$$

则有

$$H^k(\mathbb{R}^3\backslash K)=H^k(\mathbb{R}^3\backslash S^1)=\begin{cases}\mathbb{R}, & 0\le k\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

□

1.5.8 奇异上同调与 de Rham 定理

回顾奇异同调，我们定义了奇异链复形 $S_*(X) = \{S_q(X) \mid q \in \mathbb{Z}\}$ 以及其上的边界算子 $\partial : S_q \to S_{q-1}$。实际上 $S_*(X)$ 可以被视作 $S_*(X;\mathbb{Z})$，进而对于任何一个群 G，我们都可以定义带 G 系数的奇异链复形 $S_*(X;G)$，以及带 G 系数的奇异同调群 $H_*(X;G)$[15]。

而如果想要定义奇异上同调，我们就需要定义一些上链复形以及其上的边界算子，如何从一个链复形自然的得到一个上链复形呢？一个很好的办法就是利用反变函子 $\mathrm{Hom}(-,G)$。

固定阿贝尔群 G 和拓扑空间 X，我们如下定义：

定义 1.5.8 (带 G 系数的上链复形). 带 G 系数的奇异上链复形定义为

$$S^q(X;G) := \mathrm{Hom}(S_q(X), G)$$

以及边缘算子

$$\delta : S^q(X;G) \to S^{q+1}(X;G)$$
$$f \mapsto f \circ \partial$$

注 1.5.7. 利用下面的图表可以更好的理解 δ 的定义以及为什么 $\delta^2 = 0$：

$$\begin{tikzcd}
S_{q+1} \arrow[d, "\partial"] \arrow[ddr, "\delta^2(f)"] & \\
S_q \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta(f)"] & \\
S_{q-1} \arrow[r, "f"] & G
\end{tikzcd}$$

定义 1.5.9 (带 G 系数的奇异上同调群). 我们定义带 G 系数的奇异上同调群为上链复形 $\{S^*(X;G), \delta\}$ 的同调群，记作 $H^*(X;G)$。

实际上，可以看作是反变函子 $\mathrm{Hom}(-,G)$ 与奇异同调函子的复合。因此，它继承了奇异同调许多重要的性质，如：G 系数的奇异上同调群仍然具有函子性，以及

命题 1.5.6 (同伦不变性). 如果 $f \simeq g : X \to Y$ 是同伦的映射，则

$$f^* = g^* : H^*(Y;G) \to H^*(X;G)$$

由于上下同调群之间构成对偶关系，因此我们可以自然的在上下同调群之间构造一个配对，我们先在一般的阿贝尔群上叙述：如果 A, B 是阿贝尔群，定义

$$\mathrm{Hom}(A,B) \times A \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} B$$
$$(\phi, a) \mapsto \phi(a)$$

[15]这里我们采用记号 $H_*(X;G)$ 而不是 $H_*(X,G)$，以免与之后要定义的相对同调群混淆。

记作 $\langle\phi, a\rangle := \phi(a), a \in A, \phi \in \mathrm{Hom}(A, B)$。

对于任意的链复形 $C = \{C_q, \partial\}$，通过 $\mathrm{Hom}(-, G)$ 函子可以得到一个上链复形 $\mathrm{Hom}(C, G) = \{\mathrm{Hom}(C_q, G), \delta\}$，下面定义上链复形 $\mathrm{Hom}(C, G)$ 与 C 的 Kronecker 乘积如下

$$\langle\sigma^p, \sigma_q\rangle = \begin{cases} \langle\sigma^p, \sigma_p\rangle, & p = q \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这可以过渡到同调群之间的 Kronecker 乘积：

$$\begin{aligned} H^q(X; G) \times H_q(X; G) &\xrightarrow{\langle\,,\,\rangle} G \\ \langle[z^q], [z_q]\rangle &= \langle z^q, z_q\rangle = z^q(z_q) \end{aligned}$$

定理 1.5.9 (de Rham 定理)**.** 设 M 是紧的光滑流形，则其 de Rham 上同调群同构于带 $\mathbb{R}$ 系数的奇异上同调群。

证明.（概要）我们用 $S_q^{smooth}(X; \mathbb{R})$ 来记以光滑[16]奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to X$ 为基生成的 $\mathbb{R}$ 向量空间。我们定义如下的双线性的函数

$$\begin{aligned} \Omega^q(X) \times S_q^{smooth}(X; \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (\omega, \sigma) &\mapsto \int_\sigma \omega \end{aligned}$$

并且 Stokes 公式表明：

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma \mathrm{d}\omega$$

即边界算子 ∂ 与外微分算子 d 对偶，并且可以诱导到同调群上。从而有上链映射：

$$\Omega^*(X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(S_*^{smooth}(X; \mathbb{R}), \mathbb{R}) = S^*_{smooth}(X; \mathbb{R})$$

它是一个上链同伦等价。因此有 de Rham 上同调群 $H^*_{dR}(X)$ 与 $H^*(S^*_{smooth}(X; \mathbb{R}))$ 的同构。并且我们断言含入链映射

$$S_*^{smooth}(X; \mathbb{R}) \to S_*(X; \mathbb{R})$$

也是一个链同伦等价。因而它们的 Kronecker 对偶 $S^*(X; \mathbb{R}) \to S^*_{smooth}(X; \mathbb{R})$ 是一个链同伦等价。因此，de Rham 定理实际上归结于这两个链同伦等价的证明。 □

约定 1.5.1. 为了符号上的简洁，在之后 X 上同调群都用符号 $H^*(X)$ 表示，如果强调系数再明确指出，不加以区分 deRham 上同调和奇异上同调。

[16] $\sigma : \Delta_q \to X$ 光滑指的是 σ 可以延拓成某个包含 Δ_q 的某开集到 X 的光滑函数。

1.5.9 Künneth 公式

Künneth 公式给出了我们如何通过单个空间的同调群来计算乘积空间同调群的一个办法，即如何去计算 $H^*(X \times Y)$。

定义 1.5.10 (分次群的张量积)**.** 分次群 $A = \{A_p : p \in \mathbb{Z}\}$ 以 $B = \{B_q : q \in \mathbb{Z}\}$，$A\otimes$，$A \otimes B$ 也是一个分次群，定义为

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{p+q=n} (A_p \otimes B_q)$$

定理 1.5.10 (Künneth 公式)**.** 设 M, N 是紧的光滑流形，则有

$$H^*(M \times N) = H^*(M) \otimes H^*(N)$$

例 1.5.9. 由于 $T^2 = S^1 \times S^1$，显然 $H^0(T^2) = H^2(T^2) = \mathbb{R}$。关键在于计算 $H^1(T^2)$，根据 Künneth 公式有

$$\begin{aligned} H^1(T^2) &= (H^0(S^1) \otimes H^1(S^1)) \oplus (H^1(S^1) \otimes H^0(S^1)) \\ &= (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \\ &= \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.5.10 微分同调中的映射度

我们后面会发现，对于一个连续函数 f 来说，决定它的度对我们计算一些同调群来说有时候发挥了决定性的作用，并且其等价的定义各种各样，在这一节中我们先从微分同调的观点下来介绍，之后在介绍了相对同调群之后，我们再回过头来考虑在代数拓扑中我们通常如何定义映射度。

设 $f : M \to N$ 是一个光滑映射，其中 M, N 可定向的紧致光滑流形，并且 N 是连通的。对任意 $\omega \in \Omega^n(N)$，f 的度 $\deg(f)$ 定义为

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega$$

$\deg(f)$ 的存在性可以通过下面的交换图得到：

$$\begin{array}{ccc} H^n(N) & \xrightarrow{f^*} & H^n(M) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\deg(f)} & \mathbb{R} \end{array}$$

而对于一个连续函数 f，想要定义 f 的度我们任取一个与其连续同伦的光滑函数 $\widetilde{f}$，定义 $\deg(f) := \deg(\widetilde{f})$，这种想法我们之前已经使用过。

命题 1.5.7. 对于映射度，我们有以下基本的结论

1. $\deg(\mathrm{id}_M) = 1$
2. $\deg(\text{常值}) = 0$
3. $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$
4. 设 M 的连通分支为 $M_1, \ldots, M_n$，则 $\deg(f) = \sum_{i=1}^{n} \deg(f|_{M_i})$

那么我们给定一个光滑映射 f，该如何去定义其映射度呢？利用正则值以及指数的相关性质，我们可以给出一个非常优美的计算公式，在此之前，我们先回顾相关定义：

定义 1.5.11 (正则值/正则点)**.** 对于任意光滑流形间的光滑映射 $f : M^m \to N^n$，$q \in N$ 被称为是 f 的正则值，如果 q 的原像是空集，或任取 $p \in f^{-1}(q)$，有 $D_p f = T_pM \to T_pN$ 是满秩，这样的 p 称为正则点。

定义 1.5.12 (正则点的指数)**.** 对于任意光滑流形间的光滑映射 $f : M^n \to N^n$，取 $p \in M$ 是映射 f 的正则点，定义 f 在 p 处的指数为

$$\mathrm{ind}_p(f) = \begin{cases} 1, & \det D_p f > 0 \\ -1, & \det D_p f < 0 \end{cases}$$

命题 1.5.8. 设 $f : M \to N$ 是一个光滑映射，其中 M, N 可定向的紧致光滑流形，并且 N 是连通的，则对于任意正则值 $q \in N$，有

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{ind}_p(f)$$

命题的证明极大的依赖于下面的正则值原像定理

定理 1.5.11 (正则值原像定理)**.** 假定 M, N 都是紧致的光滑流形，f 是光滑映射，$q \in N$ 是 f 的正则值，假定 $\{p_1, \ldots, p_r\} = f^{-1}(q)$，则存在 q 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$，其中 $\{V_i\}$ 是互不相交的，且对每个 i 有 $f|_{V_i} : V_i \to V$ 是微分同胚，$p_i \in V_i$

下面给出定理的证明

证明. 由正则值原像定理，$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$。任取 $\omega \in \Omega^n(N)$，使得 $\mathrm{supp}\,\omega \subset V$ 并且 $\int_N \omega = 1$，则 $f^*\omega \in \Omega^n(M)$，其支撑集 $\mathrm{supp}(f^*\omega) \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_i$，则

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega_i, \quad \mathrm{supp}\,\omega_i \subset V_i$$

则

$$
\begin{aligned}
\deg(f) &= \deg(f)\int_N \omega \\
&= \int_M f^*\omega \\
&= \int_M \sum_{i=1}^r \omega_i \\
&= \sum_{i=1}^r \int_{V_i} (f|_{V_i})^*\omega \\
&= \sum_{i=1}^r \mathrm{ind}_{p_i}(f) \int_V \omega \\
&= \sum_{i=1}^r \mathrm{ind}_{p_i}(f)
\end{aligned}
$$

□

推论 1.5.15. 若 $\deg(f) \neq 0$，则 f 是满射。

1.5.11 Poincaré – Hopf 定理

一个和映射度紧密相关的定理就是有名的 Poincaré – Hopf 定理

定理 1.5.12 (Poincaré-Hopf 定理)**.** M 是 n 维紧致光滑流形，X 是 M 上的光滑向量场，并且其零点集孤立，则

$$\sum_p \mathrm{ind}_p(X) = \chi(M)$$

同样的，我们需要回顾一下向量场指数 $\mathrm{ind}_p(X)$ 的定义，任取以 p 点为中心的局部坐标 (U, φ)，取 B_δ 是以原点为中心，δ 为半径的球，使得 $B_\delta \subset \varphi(U)$，并且 X 在 U 上只有 p 一个零点，记 $\xi = \varphi_*(X|_U)$，考虑映射

$$
\begin{aligned}
\partial B_\delta = S_\delta^{n-1} &\to S^{n-1} \\
x &\mapsto \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}
\end{aligned}
$$

则 X 在 p 点的度定义为这个映射的度。

例 1.5.10. 毛球定理实际上是 Poincaré – Hopf 定理的一个特殊情况。例如在 S^2 时，任何连续的向量场都一定存在零点，因为 $\chi(S^2) = 2$；然而对于奇数维的球面上则不会出现这种情况，这是由于 Poincaré 对偶的推论告诉我们 $\chi(S^{2n+1}) = 0$。

注 1.5.8. 对连续函数 $f : S^n \to S^n$ 的映射度 $\deg(f)$，实际上还有下面的定义：考虑 f 诱导的同调群同态，则

$$\begin{aligned} f_* : H_n(S^n) &\to H_n(S^n) \\ \alpha &\mapsto \deg(f)\alpha \end{aligned}$$

定理 1.5.13 (Hopf 定理)**.** 考虑 $f, g : S^n \to S^n$，则 f 同伦于 g 当且仅当 $\deg(f) = \deg(g)$。

1.6 映射的简约同调序列

定义 1.6.1 (贴空间)**.** 设 X, Y 是拓扑空间，$A \hookrightarrow X$，以及 $f : A \to Y$ 是连续映射，在无交并 $X \coprod Y$ 中由 $a \sim f(a), a \in A$ 给出等价关系，则定义贴空间 $X \cup_f Y$ 为 $X \coprod Y / \sim$，称通过映射 f 把 X 贴到 Y 上。

命题 1.6.1. $Y \hookrightarrow X \cup_f Y$，即 Y 可以自然地看成贴空间的子空间。

注 1.6.1. 一般来说，X 不能看成是贴空间 $X \cup_f Y$ 的子空间。

定义 1.6.2 (贴胞腔)**.** $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ 称为闭胞腔；$\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ 称为开胞腔，或简称为胞腔。任给连续映射 $f : S^{n-1} \to X$，则 $X \cup_f S^{n-1}$ 称为在 X 上贴一个 n 胞腔。

例 1.6.1. S^n 可以看作是向单点集上贴一个 $n-1$ 胞腔。

例 1.6.2. T^2 可以看作是向单点集上贴两个 1 胞腔和一个 2 胞腔。

例 1.6.3. 对于子空间 $A \hookrightarrow X$，商空间 X/A 可以看作是 X 通过 $f : A \to \{pt\}$ 贴到单点集上去。

例 1.6.4 (X 上的锥形)**.** X 上的锥形 CX 定义为

$$CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$$

显然，对于任意空间 X，CX 可缩。

例 1.6.5 (双角锥)**.** 对于拓扑空间 X，其双角锥 $\sum X$ 定义为

$$\sum X = CX/X \times \{0\}$$

例 1.6.6. S^1 的双角锥 $\sum S^1 = S^2$，更一般的，$S^n = \sum S^{n-1} = \sum^n S^0$。

例 1.6.7 (映射柱)**.** 对于拓扑空间之间的连续映射 $f : X \to Y$，f 的映射柱 Zf 定义为将 $X \times [0,1]$ 通过映射 $f : X \times \{0\} \to Y$ 贴到 Y 上去。

例 1.6.8 (映射锥)**.** 对于拓扑空间之间的连续映射 $f: X \to Y$，f 的映射锥 Cf 定义为

$$Cf = Zf/X \times \{1\}$$

注 1.6.2. 映射柱与映射锥的一个想法在于，将对映射的研究转移为对空间的研究，即将对映射 f 的研究转移为对映射柱和映射锥的研究。

例 1.6.9. 设 X 是多面体，$X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$，其中 X_i 是 X 的子多面体，并且任取 i, j 有 $X_i \cap X_j = x_0 \in X$，称为 X 是诸 X_i 的单点并，通常记作 $\bigvee_{i=1}^n X_i$，则有

$$\widetilde{H}_*(X) = \bigoplus_{i=1}^n \widetilde{H}_*(X_i)$$

映射锥 Cf 的一个好处在于，它存在一个自然的 Mayer-Vietoris 耦，并且这个 Mayer-Vietoris 耦的交是已知的：我们现在来描述这个耦，记

$$C_+f = X \times [\frac{1}{2}, 1]/X \times \{1\}, \quad C_-f = X \times [0, \frac{1}{2}] \cup_f Y$$

则 $\{C_+f, C_-f\}$ 构成了映射锥 Cf 的 Mayer-Vietoris 耦，并且 $C_+f \cap C_-f = X \times \{\frac{1}{2}\} \cong X$，因此：

定理 1.6.1. 我们有如下的同调正合列

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(Cf) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(X) \to \ldots$$

证明. 考虑映射锥 Cf 的 Mayer-Vietoris 耦 $\{C_+f, C_-f\}$，利用 Mayer-Vietoris 序列则有

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(C_-f) \oplus \widetilde{H}_q(C_+f) \to \widetilde{H}_q(Cf) \to \widetilde{H}_{q-1}(X) \to \ldots$$

考虑到 C_+f 可缩，C_-f 收缩形变到 Y，则上面有上面正合列到下面序列的同构

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(Cf) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(X) \to \ldots$$

因而有想要证明的结果。 □

推论 1.6.1. 设 $A \subset X$，则有下面的长正合列

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(A) \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(X \cup CA) \to \widetilde{H}_{q-1}(A) \to \ldots$$

证明. $X \cup CA$ 就是嵌入 $i: A \to X$ 的映射锥。 □

推论 1.6.2. 对于空间 X 的双角锥 $\sum X$，有同构

$$\widetilde{H}_{q+1}(\sum X) \cong \widetilde{H}_q(X)$$

证明. 双角锥 $\sum X$ 是点映射 $X \to \{pt\}$ 的映射锥，并且 $\widetilde{H}_*(\{pt\}) = 0$。 □

下面我们来考虑一种特殊的映射锥，并称这种操作为粘贴胞腔：假设有从 D^n 的边缘 S^{n-1} 到空间 X 的映射 $f: S^{n-1} \to X$，由于 CS^{n-1} 同胚于 D^n，因此映射锥 Cf 就是贴空间 $X \cup_f D^n$，因此立刻有下面的推论

推论 1.6.3. 对于 $D^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{f} X$，有

1. $\widetilde{H}_q(X \cup_f D^n) = \widetilde{H}_q(X)$，当 $q \neq n, n-1$ 时。
2. 对于 $q = n, n-1$ 时，有正合列

$$0 \to \widetilde{H}_n(X) \to \widetilde{H}_n(X \cup_f D^n) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \to \widetilde{H}_{n-1}(X \cup_f D^n) \to 0$$

证明. 因为当 $q \neq n, n-1$ 时，$\widetilde{H}_q(S^{n-1})$ 和 $\widetilde{H}_{q-1}(X)$ 都平凡，因此根据定理 1.6.1，有同构 $\widetilde{H}_q(X \cup_f D^n) = \widetilde{H}_q(X)$。 □

注 1.6.3. 因此，对于粘贴一个 n 胞腔的结果，n 维同调群可能不变，也可能变成与 $\mathbb{Z}$ 作直和，这是因为

$$\widetilde{H}_n(X \cup_f D^n)/\widetilde{H}_n(X) \cong \operatorname{im} \partial_* \leq \mathbb{Z}$$

而 $\mathbb{Z}$ 的子群只有 0 和 $\mathbb{Z}$；$n-1$ 维同调群可能不变，也可能变成以循环子群为核的商群，这是因为

$$\widetilde{H}_{n-1}(X)/\operatorname{im} f_* \cong \widetilde{H}_{n-1}(X \cup_f D^n)$$

并且 $\operatorname{im} f_*$ 是一个循环子群。因此确定粘贴一个 n 胞腔的结果，确定 f_* 的具体形式是非常重要的，根据映射度的观点，确定映射 f 的度是非常关键的事情，决定了同调群会如何改变。

例 1.6.10. 环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 可以看作是在 $S^1 \vee S^1$ 上再粘贴一个 2 胞腔，其粘贴映射 $f: S^1 \to S^1 \vee S^1$ 是在两个 S^1 上都正反各绕一圈，因此得到

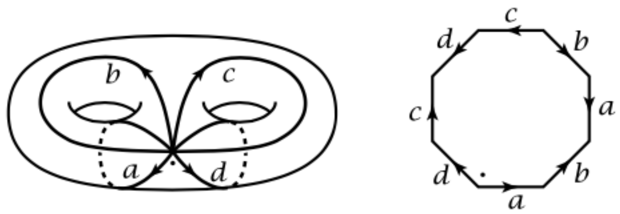
$$0 \to H_2(S^1 \vee S^1) \to H_2(T^2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} H_1(S^1 \vee S^1) \to H_1(T^2) \to 0$$

从而有

$$H_2(T^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_0(T^2) = \mathbb{Z}$$

更高维的同调群都为零。

例 1.6.11 (可定向的闭曲面的同调群)**.** 双环面 $T^2 \# T^2$ 可以看作是在 $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ 上面再粘贴一个 2 胞腔



根据可定向闭曲面的分类定理，任何一个可定向的闭曲面根据其亏格分类。一般的，对于亏格为 g 的闭曲面，我们有如下的序列

$$0 \to H_2(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g\text{个}}) \to H_2(T^2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} H_1(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g\text{个}}) \to H_1(T^2) \to 0$$

从而有

$$H_2(\Sigma_g) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma_g) = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}, \quad H_0(\Sigma_g) = \mathbb{Z}$$

更高维的同调群都为零。

例 1.6.12 (不可定向的闭曲面的同调群)**.** 根据不可定向闭曲面的分类定理，任何一个不可定向的闭曲面都是射影平面 $\mathbb{P}^2$ 的连通和，其多边形表示为 $a_1a_1 \ldots a_m a_m$，从而可以考虑将一个 2 胞腔通过映射 $f : S^1 \to \bigvee_m S^1$ 黏到 $\bigvee_m S^1$ 上去，其简约同调序列为

$$0 \to \widetilde{H}_2(\bigvee_m S^1) \to \widetilde{H}_2(m\mathbb{P}^2) \to \widetilde{H}_1(S^1) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_1(\bigvee_m S^1) \to \widetilde{H}_1(m\mathbb{P}^2) \to 0$$

其中

$$\widetilde{H}_q(\bigvee_m S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}^m, & q = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

根据简约同调序列的正合性，我们有

$$\widetilde{H}_2(m\mathbb{P}^2) = \ker f_*$$
$$\widetilde{H}_1(m\mathbb{P}^2) = \operatorname{coker} f_*$$

注意到在绕 S^1 一圈在 f 的映射下，由多边形表示可知其绕 $\bigvee_m S^1$ 中所有 S^1 两圈，因此

$$f_*(1) = \underbrace{(2, 2, \ldots, 2)}_{m\text{个}}$$

从而

$$\widetilde{H}_2(m\mathbb{P}^2) = \ker f_* = 0$$
$$\widetilde{H}_1(m\mathbb{P}^2) = \operatorname{coker} f_* = \mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(2, \ldots, 2) \cong \mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

例 1.6.13 (复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 的同调群)**.** 在计算之前，我们先来回顾一下复射影空间的等价定义：一般来说，$\mathbb{CP}^n$ 通常定义为

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\mathbb{C}^*$$

为了方便看出其上的胞腔结构，我们不妨将 $\mathbb{CP}^n$ 视作是 S^{2n+1} 上每一族圆周中的每一个粘合成一点得到的空间，可以显式的写成

$$\mathbb{CP}^n = S^{2n+1}/\{z \sim e^{i\theta}z, \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall z \in S^{2n+1}\}$$

这是我们之后常用的做法，粘合映射记作 $\pi_{(n)} : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$。更详细的来说：定义 $r : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to S^{2n+1}$ 如下

$$r(z) = \frac{z}{\|z\|}, \quad z \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$$

那么我们定义

$$f : \mathbb{CP}^n \to S^{2n+1}/S^1$$
$$[z] \mapsto [r(z)]_{S^1}$$

我们来验证这是一个良好定义的映射：假设 z, z' 在 $\mathbb{CP}^n$ 中代表相同的元素，即 $z = \lambda z', \lambda \in \mathbb{C}^*$，那么

$$r(z) = \frac{z}{\|z\|} = \frac{\lambda z'}{|\lambda|\|z'\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}r(z')$$

因此 $[r(z)]_{S^1} = [r(z')]_{S^1}$，即映射是良定的；下面证明映射 f 实际上是一个同胚，因此从拓扑上来看 $\mathbb{CP}^n$ 与 S^{2n+1}/S^1 同胚。先证明单射：如果 $[r(z)]_{S^1} = [r(z')]_{S^1}$，那么

$$\frac{z}{\|z\|} = \lambda\frac{z'}{\|z'\|} \implies z = \frac{\lambda\|z\|}{\|z'\|}z'$$

因此 $[z] = [z']$，即 f 是一个单射；另一方面，任取 $[x]_{S^1} \in S^{2n+1}/S^1$，选取其一个代表元 x，那么 $x \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$，并且 $r(x) = x$，因此 $f([x]) = [r(x)]_{S^1} = [x]_{S^1}$，即 f 也是满射。关于 f 的连续性，我们在这里省略。

根据第二种看法,很容易得到第三种看法,如果我们将 D^{2n} 与 $\{(z', \sqrt{1-\|z'\|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid z' \in D^{2n}\} \subset S^{2n+1}$ 视作同胚，那么当 $z_n \neq 0$ 时，每一个圆周 $\{e^{i\theta}z\}$ 与 D^{2n} 只交于一点，因此

$$\mathbb{CP}^n = D^{2n}/\{z' \sim \theta^{i\theta}z', \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall z' \in S^{2n-1}\}$$

从第三种定义来看，可以直接的得到 $\mathbb{CP}^n$ 的胞腔结构，就是 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上粘贴一个 D^{2n} 得到，粘贴映射正好是 $\pi_{(n-1)} : S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$。

利用这个胞腔结构，以及推论 1.6.3，我们可以通过归纳法证明：

$$H_q(\mathbb{CP}^k) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q\text{是偶数且 } q \leq 2k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $k=1$ 时，我们有

$$H_q(\mathbb{CP}^1)=H_q(S^2)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0,2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

假设当 $k<n$ 时都成立，当 $k=n$ 时，由于 $\mathbb{CP}^n$ 是 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 通过映射 $\pi_{(n-1)}:S^{2n-1}\to\mathbb{CP}^{n-1}$ 贴一个 D^{2n} 得到的，则根据推论 1.6.3，当 $q\neq 2n,2n-1$ 时，有

$$H_q(\mathbb{CP}^n)=H_q(\mathbb{CP}^{n-1})=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q\text{是偶数且 } q\leq 2n-2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

而当 $q=2n,2n-1$ 时，考虑正合列：

$$0\to\widetilde{H}_{2n}(\mathbb{CP}^{n-1})\to\widetilde{H}_{2n}(\mathbb{CP}^n)\to\widetilde{H}_{2n-1}(S^{2n-1})\to\widetilde{H}_{2n-1}(\mathbb{CP}^{n-1})\to\widetilde{H}_{2n-1}(\mathbb{CP}^n)\to 0$$

有

$$\begin{aligned}&\widetilde{H}_{2n}(\mathbb{CP}^n)\cong\widetilde{H}_{2n-1}(S^{2n-1})\cong\mathbb{Z}\\ &\widetilde{H}_{2n-1}(\mathbb{CP}^n)\cong 0\end{aligned}$$

例 1.6.14 (透镜空间)**.** 设 p,q 是互素的自然数，则存在整数 s,t 使得

$$\det\begin{pmatrix} s & p\\ t & q\end{pmatrix}=1$$

取两个实心环 V_1,V_2，它们的表面记作 T_1^2,T_2^2，定义一个同胚映射

$$\begin{aligned}h:T_1^2&\to T_2^2\\ (e^{i\theta},e^{i\phi})&\mapsto(e^{i(s\theta+p\phi)},e^{i(t\theta+q\phi)})\end{aligned}$$

它把 V_1 的经圈变成 V_2 的 (p,q) 曲线。通过同胚 h 把 V_1,V_2 的表面粘合起来得到的空间 $V_1\cup_h V_2$ 称为透镜空间 $L(p,q)$。想要得到透镜空间 $L(p,q)$ 的胞腔结构，我们首先在 V_2 上贴一个 2-胞腔，考虑：

$$\begin{aligned}f:S^1&\to V_2\\ e^{i\phi}&\mapsto(e^{ip\phi},e^{iq\phi})\end{aligned}$$

从而有正合列

$$0\to\widetilde{H}_2(V_2)\to\widetilde{H}_2(V_2\cup_f D^2)\to\widetilde{H}_1(S^1)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_1(V_2)\to\widetilde{H}_1(V_2\cup_f D^2)\to 0$$

如果把 V_2 的纬线 $S^1\times 1$ 视作 V_2 的强形变收缩核，则上述正合列实际上变成

$$0\to 0\to\widetilde{H}_2(V_2\cup_f D^2)\to\mathbb{Z}\xrightarrow{p}\mathbb{Z}\to\widetilde{H}_1(V_2\cup_f D^2)\to 0$$

从而

$$\widetilde{H}_q(V_2 \cup_f D^2) = \begin{cases} 0, \quad p \geq 2 \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad p = 1 \\ \mathbb{Z}, \quad p = 0 \end{cases}$$

再在 $V_2 \cup_f D^2$ 上贴一个 3-胞腔，得到透镜空间 $L(p,q)$，从而

$$\widetilde{H}_1(L(p,q)) = \widetilde{H}_q(V_2 \cup_f D^2) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

以及正合列

$$0 \to \widetilde{H}_3(V_2 \cup_f D^2) \to \widetilde{H}_3(L(p,q)) \to \widetilde{H}_2(S^2) \to \widetilde{H}_2(V_2 \cup_f D^2) \to \widetilde{H}_2(L(p,q)) \to 0$$

因此有 $\widetilde{H}_3(L(p,q)) = \mathbb{Z}, \widetilde{H}_2(L(p,q)) = 0$，从而

$$H_k(L(p,q)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \quad k = 0, 3 \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad k = 1 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$$

2 相对同调

2.1 相对同调群

定义 2.1.1 (拓扑空间偶). 一个拓扑空间 X 与它的一个子空间 A 放在一起，称为一个拓扑空间偶 (X, A)。

定义 2.1.2 (空间偶的映射). 拓扑空间偶之间的映射 $f : (X, A) \to (Y, B)$ 指的是 $f : X \to Y$ 满足 $f(A) \subset B$。

定义 2.1.3 (空间偶的同伦). 空间偶映射的同伦 $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ 指的是联结 f, g 的同伦 $(X \times I, A \times I) \to (Y, B)$。

现在观察空间偶 (X, A)，则对任意的 q，我们有 $S_q(A) \subset S_q(X)$，则定义空间偶的 q 维奇异链群为

定义 2.1.4 (空间偶的奇异链). 空间偶 (X, A) 的 q 维奇异链群定义为商群

$$S_q(X, A) := S_q(X)/S_q(A)$$

注意到边缘态射 $\partial_q : S_q(A) \to S_{q-1}(A)$，那么其诱导了空间偶的奇异链群之间的态射，并且作用两次仍为零，那么：

定义 2.1.5 (空间偶的相对奇异链复形). 空间偶 (X,A) 的相对奇异链复形定义为

$$S_*(X,A) := \{S_q(X,A), \partial_q\}$$

定义 2.1.6 (空间偶的相对奇异同调群). 空间偶 (X,A) 的相对奇异同调群

$$H_*(X,A) := H_*(S_*(X,A))$$

定义 2.1.7 (相对同调的同态). 设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 是空间偶的映射，链映射 $f_\#: S_*(X)\to S_*(Y)$ 把子复形 $S_*(A)$ 映入 $S_*(B)$，则诱导了相对链映射 $f_\#: S_*(X,A)\to S_*(Y,B)$，而相对同调的同态 $f_*: H_*(X,A)\to H_*(Y,B)$ 指的是这个相对链映射诱导的同调群同态。

注 2.1.1. 自然的，如果两个空间偶映射 f,g 同伦，则诱导的相对同调的同态 f_*,g_* 也相同。同样地，如果两个空间偶有着相同的伦型，则它们有着相同的相对同调群。

对于空间偶来说，显然我们下面的短正合列

$$0\to S_*(A)\to S_*(X)\to S_*(X,A)\to 0$$

所以我们有下面的定理

定理 2.1.1 (空间偶的同调序列). 设 (X,A) 是空间偶，则有正合同调序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

注 2.1.2. 与单个空间不同的是, 对于空间偶的简约同调群没有给出任何新鲜的东西, 这是因为

$$S_*(X)/S_*(A) = \widetilde{S}_*(X)/\widetilde{S}_*(A)$$

完全相同，因此

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

注 2.1.3. 我们仔细探究一下边缘同态

$$\partial_*: H_q(X,A)\to H_{q-1}(A)$$

任取相对闭链 $\overline{z}\in Z_q(X,A)$ 是 $[\overline{z}]\in H_q(X,A)$ 的代表元, 则 $\overline{z}$ 也可以看作是 X 上的链，并且满足 $\partial^X\overline{z}\in A$，并且 $\partial^X\overline{z}\in Z_{q-1}(A)$，这是因为 $\partial^A(\partial^X\overline{z}) = \partial^X(\partial^X\overline{z}) = 0$，根据 ∂_* 的定义实际上

$$\partial_*([\overline{z}]) = [\partial^X\overline{z}]$$

例 2.1.1. 设 x_0 是空间 X 中的一个点，则 $H_*(X,x_0)\cong\widetilde{H}_*(X)$。

例 2.1.2. 相对同调群

$$H_q(D^n,S^{n-1})\cong\widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) = \begin{cases}\mathbb{Z}, & q=n\\ 0, & q\neq n\end{cases}$$

2.2 切除定理

定理 2.2.1. 设 X_1, X_2 是 X 的子空间，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦的充要条件是含入映射 $i:(X_1, X_1\cap X_2)\to(X_1\cup X_2, X_2)$ 诱导了相对同调群的同构

$$i_*: H_*(X_1, X_1\cap X_2)\xrightarrow{\cong} H_*(X_1\cup X_2, X_2)$$

证明. 注意到

$$\frac{S_*(X_1)+S_*(X_2)}{S_*(X_2)}=\frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1)\cap S_*(X_2)}=\frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1\cap X_2)}=S_*(X_1, X_1\cap X_2)$$

在链复形偶 $(S_*(X_1)+S_*(X_2), S_*(X_2))$ 的正合同调序列中做上述替换，即替换

$$H_q((S_*(X_1)+S_*(X_2), S_*(X_2)))=H_q((S_*(X_1), S_*(X_1)\cap S_*(X_2)))=H_q(X_1, X_1\cap X_2)$$

从而得到

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_q(X_2) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(S_*(X_1)+S_*(X_2)) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & H_q(X_1, X_1\cap X_2) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X_2) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_q(X_2) \arrow[r] & H_q(X_1\cup X_2) \arrow[r] & H_q(X_1\cup X_2, X_2) \arrow[r] & H_q(X_2) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

再利用五引理即可。 □

推论 2.2.1 (切除定理)**.** 设 (X, A) 是空间偶，子集 $W\subset A$ 满足 $\overline{W}\subset \operatorname{int} A$，则含入映射 $i:(X\backslash W, A\backslash W)\to(X, A)$ 诱导了相对同调群的同构

$$i_*: H_*(X-W, A-W)\xrightarrow{\cong} H_*(X, A)$$

证明. 设 $X_1=X\backslash W, X_2=A$，则 $\mathring{X}_1\cup\mathring{X}_2=X$，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 X 的是 Mayer-Vietoris 耦。 □

下面的定理揭示了相对同调群与绝对同调群的关系

定理 2.2.2. 设 (X, A) 是空间偶，A 非空，则

$$H_*(X, A)\cong \widetilde{H}_*(X\cup CA)$$

证明. 由于 CA 可缩，观察空间偶 $(X\cup CA, CA)$ 则有

$$H_*(X\cup CA, CA)\cong \widetilde{H}_*(X\cup CA)$$

再利用切除定理切除上半锥 $W=(A\times[\frac{1}{2}, 1])/(A\times\{1\})$，切除后的空间以 (X, A) 为收缩形变核，因此

$$H_*(X\cup CA, CA)\cong H_*(X, A)$$

□

习题 2.2.1. 计算以下 $H_*(X,A)$

1. $X=S^2$，A 是赤道；

2. X 是 Möbius 带，A 是其边缘。

证明. （1）直接根据空间偶的同调序列，我们有：

$$0\to \widetilde{H}_2(A)\to \widetilde{H}_2(X)\to H_2(X,A)\to \widetilde{H}_1(A)\to \widetilde{H}_1(X)\to H_1(X,A)\to \widetilde{H}_0(A)=0$$

利用 S^2 和 S^1 的同调信息可以直接得到

$$H_q(X,A)=\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & q=2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

注 2.2.1. *在之后我们马上要介绍到好配对，实际上 (X,A) 构成了一个好配对，此时 $H_q(X,A)=\widetilde{H}_q(X/A)$，并且注意到 X/A 是两个 S^2 的单点并，从而得到同样的结果。*

（2）同样我们导出空间偶的同调序列：

$$0=\widetilde{H}_2(X)\to H_2(X,A)\to \widetilde{H}_1(A)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_1(X)\to H_1(X,A)\to \widetilde{H}_0(A)=0$$

由于此时 $\widetilde{H}_1(A)=\mathbb{Z},\widetilde{H}_2(X)=0$，那么 i_* 的具体形式就变得至关重要：根据 Möbius 带的几何特点，绕边缘总一圈时绕中心线走了两圈，因此 i_* 实际上是一个乘 2 映射，从而：

$$\widetilde{H}_q(X,A)=\begin{cases}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & q=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

□

习题 2.2.2. 试举出空间偶 $(X,A),(Y,B)$，使得 $X\simeq Y,A\simeq B$，但是 $H_*(X,A)\not\cong H_*(X,B)$

证明. 考虑 $X=Y$ 以及 $A=\{x_1\},B=\{x_2\}$，$x_1\in C_1,x_2\in C_2$，其中 C_1,C_2 是两个有着不同同调群的连通分支，根据简约同调与相对同调的关系，我们有

$$H_*(X,\{x_1\})=H_*(C_2)\oplus\widetilde{H}_*(C_1)$$
$$H_*(X,\{x_2\})=H_*(C_1)\oplus\widetilde{H}_*(C_2)$$

□

习题 2.2.3. 设 F 是紧致带边曲面，B 是边缘，试根据带边曲面的拓扑分类定理计算相对同调群 $H_*(F,B)$

证明. 根据紧带边曲面的分类定理，它一定同胚与某个紧闭曲面挖去有限个闭包相互分离的开圆盘，而根据闭曲面分类定理，紧闭曲面一定同胚于 Σ_g 或者 $m\mathbb{P}^2$，从而只有下面的两种情况：

1. F 同胚于 Σ_g 挖去 n 个闭包相互分离的开圆盘；
2. F 同胚于 $m\mathbb{P}^2$ 挖去 n 个闭包相互分离的开圆盘。

先来考虑第一种情况：记挖去的圆盘为 $\{V_i\}_{i=1}^n$，从而有空间偶的嵌入

$$i : (F, B) \to (\Sigma_g, \coprod_{i=1}^n V_i)$$

如果我们令 $X_1 = F, X_2 = \coprod_{i=1}^n V_i$，从而 $X_1 \cup X_2 = \Sigma_g, X_1 \cap X_2 = \coprod_{i=1}^n \partial V_i$，并且 $X_1 \cap X_2$ 是一些开圆盘的收缩形变核，从而 $\{X_1, X_2\}$ 构成了 Σ_g 的 Mayer-Vietoris 耦，从而

$$H_*(F, B) \cong H_*(\Sigma_g, \coprod_{i=1}^n V_i)$$

根据空间偶的同调序列，我们有

$$0 \to \widetilde{H}_2(\Sigma_g) \to \widetilde{H}_2(F, B) \to \widetilde{H}_1(\coprod_{i=1}^n V_i) \to \widetilde{H}_1(\Sigma_g) \to \widetilde{H}_1(F, B) \to \widetilde{H}_0(\coprod_{i=1}^n V_i) \to \widetilde{H}_0(\Sigma_g) \to H_0(F, B) \to 0$$

从而有

$$H_q(F, B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 2 \\ \mathbb{Z}^{2g+n-1}, & q = 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

对于第二种情况，分析办法与上面相同，在此不再赘述，而将结果罗列如下：

$$H_q(F, B) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{m+n-2}, & q = 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

□

2.3 空间三元组的同调序列

定义 2.3.1 (空间三元组)**.** 一个拓扑空间 X 与它的两个子空间 $B \subset A$ 放在一起，称为一个空间三元组 (X, A, B)

定义 2.3.2. 空间三元组之间的映射 $f : (X, A, B) \to (X', A', B')$ 指的是 $f : X \to X'$ 满足 $f(A) \subset A', f(B) \subset B'$。

对于空间三元组 (X,A,B)，我们总是有下面的短正合列

$$0 \to S_*(A,B) \xrightarrow{i_\#} S_*(X,B) \xrightarrow{j_\#} S_*(X,A) \to 0$$

则我们有

定理 2.3.1 (三元组的同调序列). 设 (X,A,B) 是空间三元组，则有正合同调序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A,B) \xrightarrow{i_*} H_q(X,B) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A,B) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

定理 2.3.2 (同调序列的自然性). 设 $f:(X,A,B)\to(X',A',B')$ 是空间三元组的映射，则有下面的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X,B) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{q-1}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(A',B') \arrow[r] & H_q(X',B') \arrow[r] & H_q(X',A') \arrow[r] & H_{q-1}(A',B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定理 2.3.3. 三元组 (X,A,B) 相对同调长正合列中的边缘同态 ∂_* 有分解：对于任意 $C\subset B$，有

$$H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A,C) \xrightarrow{j_*} H_{q-1}(A,B)$$

其中 j_* 是由含入映射 $j:(A,C)\to(A,B)$ 诱导的。

证明. 含入映射 $j:(X,A,C)\to(X,A,B)$ 给我们了如下的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A,C) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j_*"] & H_q(X,C) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "j_*"] & H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "j_*"] & H_{q-1}(A,C) \arrow[r] \arrow[d, "j_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(A,B) \arrow[r, "i_*"] & H_q(X,B) \arrow[r, "j_*"] & H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q-1}(A,B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

而右边方块的交换性就是我们需要的分解。 □

2.4 相对同调与商空间同调

给定空间偶 (X,A)，我们已经见识到了相对同调群 $H_*(X,A)$ 的一些性质，例如推论 2.2.1 以及定理 2.2.2，但更有趣的是，如果我们取非常好的空间偶 (X,A)，其相对同调群将会反应出商空间 X/A 的同调信息，这是一种非常好的计算办法。

定义 2.4.1 (好配对). (X,A) 是空间偶，A 闭且 A 有开邻域 V 使得其以 A 为强形变收缩核，则 (X,A) 称为一个好配对。

命题 2.4.1. 设 (X,A) 是一个好配对，则有同调群的同构

$$H_*(X,A)\cong H_*(X/A,A/A)\cong \widetilde{H}_*(X/A)$$

证明. 取 V 是 A 的开邻域使得 V 强形变收缩到 A，则空间偶 (V,A) 强形变收缩到 (A,A)，从而有同构

$$H_*(V,A) \cong H_*(A,A)$$

而后者是平凡群。写出 (X,V,A) 的同调正合序列，由于 $H_*(X,A) \cong H_*(X,V)$，观察下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
H_*(X,A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H_*(X,V) \arrow[d] & H_*(X\backslash A, V\backslash A) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] \\
H_*(X/A,A/A) \arrow[r, "\cong"] & H_*(X/A,V/A) & H_*(X/A\backslash A/A, V/A\backslash A/A) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

根据已有的同构关系可知 $H_*(X,A) \to H_*(X/A,A/A)$ 是同构。 □

推论 2.4.1. 设 (X,A) 是好配对，则有长正合列

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_q(X/A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{q-1}(A) \to \ldots$$

其中 $i: A \to X$ 是嵌入，$j: X \to X/A$ 是商映射。

证明. 将注 2.1.2 中的 $H_*(X,A)$ 换成 $\widetilde{H}_*(X/A)$ 即可。 □

定义 2.4.2 (相对同胚)**.** 空间偶的映射 $f:(X,A) \to (Y,B)$ 如果满足 f 是 X/A 到 Y/B 的同胚，则称 f 是相对同胚。

命题 2.4.2. 设 $(X,A),(Y,B)$ 是好配对，$f:(X,A) \to (Y,B)$ 是相对同胚，则 f 诱导同构

$$f_*: H_*(X,A) \to H_*(Y,B)$$

证明.

$$H_*(X,A) \cong H_*(X/A) \cong H_*(Y/B) \cong H_*(Y,B)$$

□

2.5 映射度与定向

相对同调除了能够帮助我们计算一些商空间的同调群以外，它的另外一个作用就是将局部与整体联系起来，例如对一个拓扑空间 X 以及一个固定的点 $x \in X$，利用切割定理我们有

$$H_*(X, X\backslash\{x\}) \cong H_*(U, U\backslash\{x\})$$

其中 U 是任意一个包含 x 的开邻域，这说明 $H_*(X, X\backslash\{x\})$ 只计算了 x 局部附近的同调信息。如果拓扑空间 X 的局部信息足够好，例如 X 是一个 n 维流形，那么

任意 $x \in X$ 都存在一个同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的开邻域，那么

$$H_q(X, X \backslash \{x\}) = H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\}) = \begin{cases} 0, & q \neq n \\ \mathbb{Z}, & q = n \end{cases}$$

注意到 $\mathbb{Z}$ 有两种生成元，1 与 -1，这实际上对应了 X 在 x 处的两种局部的定向，之后我们会不断深刻的理解，“定向是同调群的一个生成元”这种观点。

2.5.1 定向理论

我们先看一下如何在 $\mathbb{R}^n$ 上给出一个标准定向，即下面我们尝试构造出 $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ 的一个生成元，并把它称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准定向。

考虑单形 $\alpha_n : \Delta_n \to \mathbb{R}^n$，定义为

$$\alpha_n : \begin{cases} e_0 \mapsto (-1, -1, \ldots, -1) \\ e_1 \mapsto (1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ e_n \mapsto (0, 0, \ldots, 1) \end{cases}$$

我们断言 α_n 是 $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ 的相对闭链，且代表 $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ 中的一个生成元，称 $[\alpha_n]$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准定向，记为 $\mathcal{E}^n$

由于流形在局部上同胚于 $\mathbb{R}^n$，因此通过局部坐标卡，自然地可以将 $\mathbb{R}^n$ 上的标准定向，通过拉回得到流形上的局部定向：

设 M 是 n 维流形，$\phi : (U, x) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ 是局部坐标卡，那么局部坐标卡 ϕ 诱导了同构 $\phi_* : H_n(U, U \backslash \{x\}) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$，则 $\phi_*^{-1}(\mathcal{E}^n)$ 称为 $x \in M$ 处由局部坐标卡 (U, ϕ) 决定的定向。

注 2.5.1. 然而在学习微分拓扑时，也存在定向理论：一个流形是可定向的，如果存在一个图册，任取 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 是其中的两个坐标卡，以及 $p \in U \cap V$，满足 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 在 $\psi(p)$ 的 Jacobi 矩阵的行列式恒为正或恒为负。而下面的命题解释了代数拓扑与微分拓扑中定向的关联：

命题 2.5.1. $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ 是光滑同胚，$J_f(a)$ 非退化，对于

$$f_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{a\}) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{b\})$$

当 $\det J_f(a) > 0$ 时，$f_*(\mathcal{E}^n) = \mathcal{E}^n$，当 $\det J_f(a) < 0$ 时，$f_*(\mathcal{E}^n) = -\mathcal{E}^n$

因此如果在每一处的转移函数 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵的行列式同号，那么流形每一处的局部定向在转移函数的变换下都是兼容的，从而我们可以得到流形整体的定向，这与微分拓扑中的流形可定向是融洽的。

例 2.5.1 (球体（胞腔）的定向). 球体 D^n 的一个定向，是指 $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\}) = \mathbb{Z}$ 的一个生成元；球体 D^n 的标准定向，是指 $\mathbb{R}^n$ 的标准定向 $\mathcal{E}^n$ 在上述同构下的原像。

例 2.5.2 (球面的定向). 球面 S^{n-1} 的一个定向，是指 $\widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ 的一个生成元。取定了定向的球面称为有向球面。

注 2.5.2. 我们之所以这么定义球面的定向，是因为任取 $x \in S^{n-1}$，x 处的局部定向为 $H_{n-1}(S^{n-1}, S^{n-1} \backslash \{x\})$，但由于 $S^{n-1} \backslash \{x\}$ 可缩以及相对同调群与简约同调群的关系，我们有

$$\widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong H_{n-1}(S^{n-1}, S^{n-1} \backslash \{x\})$$

从而 S^{n-1} 任何一个点处的局部定向都可以给出一个整体的定向。

2.5.2 代数拓扑中的映射度

在代数拓扑中，我们通常只会用到有向球面之间的映射 $f : S^n \to S^n$ 的映射度，这实际上和之后的黏贴胞腔的操作有关。

定义 2.5.1. 设 S_1^n 和 S_2^n 是两个有向球面，其定向分别用 $[S_1^n], [S_2^n]$ 来记，$f : S_1^n \to S_2^n$ 是连续函数，则 $\deg f$ 由

$$f_*([S_1^n]) = \deg(f)[S_2^n]$$

规定的整数给出。

定义 2.5.1 中给出的映射 f 的映射度与微分同调观点意义下的本质上是一样的，因此我们可以将命题 1.5.8 中叙述的计算映射度的方法直接搬到这里，如下陈述：

命题 2.5.2. 设 $f : S^1 \to S^1$ 光滑，则对任意 f 的正则值 $y \in S^1$，我们有

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \det J_f(x)$$

3 胞腔同调

3.1 胞腔复形

定义 3.1.1 (胞腔). 拓扑空间 X 称为一个 q 维闭胞腔，如果它同胚于 q 维实心球 D^q；其称为一个 q 胞腔，如果它同胚于 q 维开实心球 $\operatorname{Int} D^q := D^q \backslash S^{q-1}$

定义 3.1.2 (胞腔剖分). 设 X 是一个 *Hausdorff* 空间，$\mathcal{E} \subset 2^X$，其中 2^X 是 X 的子空间族。X 上的一个胞腔剖分指的是 $\mathcal{E}$ 满足

1. $X = \coprod_{e_i^q \in \mathcal{E}} e_i^q$；

2. 每一个 e_i^q 都是一个 q 胞腔，其中 q 称为 e_i^q 的维数；对每一个 $e_i^q \in \mathcal{E}$，都存在一个连续映射 φ_i^q 使得

$$\varphi_i^q : D^q \to X$$

满足 φ_i^q 是 $\operatorname{Int} D^q$ 到 e_i^q 的同胚，φ_i^q 称为是 e_i^q 的特征映射；

3. 胞腔 e_i^q 的边缘 $\dot{e}_i^q := \overline{e}_i^q \backslash e_i^q$ 的每一点都属于低于 q 维的胞腔；

4. 闭包有限：每个 $e \in \mathcal{E}$，$\overline{e}$ 只与 $\mathcal{E}$ 中有限个胞腔相交。

5. 弱拓扑：$A \subset X$ 闭当且仅当对每个 $e \in \mathcal{E}$ 有 $A \cap \overline{e}$ 是 $\overline{e}$ 中的闭集。

简记为 $(X, \mathcal{E})$ 是一个胞腔复形，或者 X 是一个胞腔复形，或 $\mathcal{E}$ 是 X 的一个胞腔剖分。

注 3.1.1. 若 X 是有限胞腔复形，则定义中的 $4,5$ 冗余，因此为了避免无穷带来的技术上的麻烦，今后讨论的胞腔复形，或者叫胞腔复形，都是有限的，常用 X 来记。

定义 3.1.3 (骨架)**.** 记 $X^k = \bigcup_{q \le k} e_i^q$ 为维数小于等于 k 的全体胞腔的并集，称为 X 的 k 维骨架。

命题 3.1.1. 对于胞腔复形，我们有以下事实

1. 对于特征映射 $\varphi_i^q : D^q \to X$，我们有 $\varphi_i^q(D^q) = \overline{e}_i^q$

2. X 是紧的当且仅当 $\mathcal{E}$ 有限。

定义 3.1.4 (子复形)**.** 记 $X' = \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e$，其中 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$，称 $(X', \mathcal{E}')$ 是 $(X, \mathcal{E})$ 的子复形，如果 $\mathcal{E}'$ 形成了 X' 的胞腔结构。

命题 3.1.2. 下面命题等价

1. $(X', \mathcal{E}')$ 是子复形；

2. X' 是闭集；

3. 对每个 $e \in \mathcal{E}'$ 满足 $\overline{e}$ 包含在 $\mathcal{E}'$ 的胞腔的并中；

4. 对每个 $e \in \mathcal{E}'$ 有 $\overline{e} \in X'$

利用上述命题我们可以给出子复形的一个等价定义：

定义 3.1.5 (子复形的另一定义)**.** 对于胞腔复形 X，设 $A \subset X$，A 闭且 A 是 X 中若干胞腔的并，则 A 是 X 的子复形。

推论 3.1.1. n 维骨架 X^n 是子复形。

定义 3.1.6 (胞腔复形的维数)**.** 若有 n 使得 $X^n = X$，则最小的这样的 n 称为 X 的维数。

定义 3.1.7 (胞腔复形的等价定义)**.** 设 X 是 *Hausdorff* 空间，一族闭子空间 $\varnothing = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n \subset \dots$ 使得 $X = \bigcup_{n\geq 0} X^n$，其中 X^0 是 X 的离散点集，且 X^q 是把一些 q 胞腔粘贴到 X^{q-1} 上得到的，更详细地说，记

$$\varphi^q : \coprod_{i\in\Lambda_q} D_i^q \supset \coprod_{i\in\Lambda_q} S_i^{q-1} \to X^{q-1}$$

则

$$X^q = (\coprod_{i\in\Lambda_q} D_i^q) \cup_{\varphi^q} X^{q-1}$$

其中对每个 $i \in \Lambda_q$，映射 $\varphi_i^q : D_i^q \to X^{q-1}$ 是特征映射；并且满足弱拓扑条件，即 $A \subset X$ 闭当且仅当对每个 q 有 $A \cap X^q$ 是 X^q 的闭集。

例 3.1.1. 对 n 维球面 S^n 来说，$X^0 = \cdots = X^{n-1} = \{pt\}$，$X^n = D^n \cup_f X^0$, 其中 $D^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{f} \{pt\}$。

例 3.1.2. 对于环面 T^2 来说，$X^0 = \{pt\}, X^1 = \bigvee_2 S^1, X^2 = D^2 \cup_f X^1$，如果将 D^2 看成 4 边形，$\bigvee_2 S^1$ 的两个 S^1 分别以 a, b 来记，则 f 将 D^2 粘贴在 $\bigvee_2 S^1$ 上的方式为 $aba^{-1}b^{-1}$。

例 3.1.3. 对于亏格为 g 的有向闭曲面 T^g 来说，$X^0 = \{pt\}, X^1 = \bigvee_{2g} S^1, X^2 = D^2 \cup_f X^1$, 如果将 D^2 看成 $4g$ 边形, 则 $D^2 \supset S^1 \xrightarrow{f} \bigvee_{2g} S^1$ 为 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$。

例 3.1.4. 对于实射影空间 $\mathbb{RP}^n$，我们可以将其看作是 S^n 商掉对径点，圆盘 D^n 将边界 S^{n-1} 对径点相粘贴，而 S^{n-1} 将对径点相粘贴则就是 $\mathbb{RP}^{n-1}$，因此可以看出 $\mathbb{RP}^n$ 的胞腔复形结构为 $\mathbb{RP}^n = D^n \cup_{\pi_{n-1}} \mathbb{RP}^{n-1}$，其中 $\pi_{n-1} : S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ 为对径映射，因此

$$\mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$$

例 3.1.5. 根据例 1.6.13，我们可以看出复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 的胞腔复形结构为

$$\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n}$$

定义 3.1.8 (胞腔偶)**.** 空间偶 (X, A) 被称为一个胞腔偶，如果 X 是胞腔复形，A 是 X 的子复形。

定义 3.1.9 (胞腔映射)**.** $f : (X, A) \to (Y, B)$ 是一个空间偶的映射，而 $(X, A), (Y, B)$ 都是胞腔偶，满足 $f(X^k) \subset Y^k$，则称 f 是一个胞腔映射。

命题 3.1.3. 给定胞腔偶 $(X, A), (Y, B)$ 以及空间偶映射 $f : (X, A) \to (Y, B)$，都存在胞腔映射 $g : (X, A) \to (Y, B)$ 使得 $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$，称 g 为 f 的胞腔逼近。

命题 3.1.4. 胞腔偶 (X,A) 是一个好配对。

注 3.1.2. 由于胞腔偶给我们提供了大量的好配对的例子，因此这也是胞腔复形重要的一个原因。

引理 3.1.1.

$$H_q(X^n,X^{n-1})=\begin{cases}0, & q\neq n\\ \bigoplus_{\Lambda_n}\mathbb{Z}, & q=n\end{cases}$$

即 $H_n(X^n,X^{n-1})$ 是自由阿贝尔群，每一个 n 胞腔对应了它的一个生成元。

证明. 注意到 X^n/X^{n-1} 是 n 个 S^n 的单点并，因此

$$H_q(X^n,X^{n-1})=\widetilde{H}_q(X^n/X^{n-1})=\widetilde{H}_q(\bigvee_{i\in\Lambda_q}S^n_i)=\bigoplus_{i\in\Lambda_q}\widetilde{H}_q(S^n)=\begin{cases}0, & q\neq n\\ \bigoplus_{\Lambda_n}\mathbb{Z}, & q=n\end{cases}$$

□

引理 3.1.2.

$$H_q(X^k)=\begin{cases}0, & q>k\\ H_q(X), & q<k\end{cases}$$

证明. 考虑空间偶 (X^k,X^{k-1}) 的相对同调序列

$$\cdots\to H_{q+1}(X^k,X^{k-1})\xrightarrow{\partial_*}H_q(X^{k-1})\xrightarrow{i_*}H_q(X^k)\to H_q(X^k,X^{k-1})\to\dots$$

因此当 $q\neq k,k-1$，左右两端都为零，从而 $H_q(X^{k-1})\cong H_q(X^k)$。观察 $X^0\subset X^1\subset X^2\subset\dots$ 诱导的同调群序列

$$H_q(X^0)\to H_q(X^1)\to H_q(X^2)\to\cdots\to H_q(X^{k-1})\to H_q(X^k)$$

因此当 $q>k$ 时，

$$H_q(X^k)\cong H_q(X^{k-1})\cong\dots\cong H_q(X^0)=0$$

而当 $q<k$ 时，

$$H_q(X^k)\cong H_q(X^{k+1})\cong\dots\cong H_q(X^n)=H_q(X)$$

□

有了上面的两个引理，我们则可以建立胞腔同调下面关键的结果：

定义 3.1.10 (胞腔链群)**.** 记 $C_q(X)=H_q(X^q,X^{q-1})$，称为 X 的 q 维胞腔链群，定义 $\partial_q:C_q(X)\to C_{q-1}(X)$ 为空间三元组 (X^q,X^{q-1},X^{q-2}) 的相对同调序列中的连接同态 ∂_*，即

$$\partial_*:H_q(X^q,X^{q-1})\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(X^{q-1},X^{q-2})$$

定理 3.1.1. $\{C_q(X), \partial_q\}$ 是链复形，记为 $C_*(X)$。

证明. 我们只需要验证，$\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$，考虑下面的交换图：

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \arrow[d, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_{q+1}"] & & \\
H_q(X^q) \arrow[r, "j_*"] & H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_q"] & H_{q-1}(X^{q-1}) \arrow[d, "i_*"] \\
& & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2})
\end{tikzcd}$$

由于中间的横行是正合列，因此有我们期待的结论。 □

定理 3.1.2. 设 X 是胞腔复形，则有同构 $H_*(C_*(X)) \cong H_*(X)$。

证明. 所有的叙述中提到的符号都在证明结尾处的交换图表中出现：由于胞腔同调的性质，我们有 $H_q(X^{q-1})$ 和 $H_{q-1}(X^{q-2})$ 都是平凡群，因此根据正合性有出现的两个 j_* 都是单射；根据定义，我们有 $C_q = H_q(X^q, X^{q-1})$，因此 C_q 中的闭链为 $\ker \partial_q = \ker j_* \circ \partial_*$，由于 j_* 是单射因此 $Z_q(C_q) = \ker \partial_* = \operatorname{im} j_*$，因此 $Z_q(C_q)$ 和 $H_q(X^q)$ 是同构。下面考虑 $\operatorname{im} \partial_{q+1}$，由于 $j_*^{-1}(\operatorname{im} \partial_{q+1}) = \operatorname{im} \partial_* = \ker i_*$，而由于 $H_q(X^q) = H_q(X^{q+1})$，因此 i_* 的核平凡，从而：

$$H_q(C_q(X)) = \frac{\ker \partial_q}{\operatorname{im} \partial_{q+1}} = \frac{H_q(X^q)}{\ker i_*} = H_q(X^q) = H_q(X^{q+1}) = H_q(X)$$

$$\begin{tikzcd}
 & H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \arrow[d, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_{q+1}"] & & H_{q-1}(X^{q-2}) = 0 \arrow[d, "i_*"] \\
0 = H_q(X^{q-1}) \arrow[r, "i_*"] & H_q(X^q) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "i_*"] & H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_q"] & H_{q-1}(X^{q-1}) \arrow[d, "j_*"] \\
 & H_q(X^{q+1}) \arrow[d, "j_*"] & & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \\
 & 0 = H_q(X^{q+1}, X^q) & &
\end{tikzcd}$$

□

注 3.1.3. 观察上述证明，同构 $\Theta : H_q(C_q(X)) \to H_q(X)$ 实际上由 $i_* j_*^{-1}$ 给出，其中

$$H_q(X) = H_q(X^{q+1}) \xleftarrow{i_*} H_q(X^q) \xrightarrow{j_*} H_q(X^q, X^{q-1})$$

定义 3.1.11 (胞腔链映射). 设 X, Y 是胞腔复形，$f : X \to Y$ 是胞腔映射，则 $f_q^C : C_q(X) \to C_q(Y)$ 定义为

$$f_* : H_q(X^q, X^{q-1}) \to H_q(Y^q, Y^{q-1})$$

命题 3.1.5. $f_{\#}^C = \{f_q^C\} : C_*(X) \to C_*(Y)$ 是链映射。

证明. 为了验证 $f_{\#}^C$ 是链映射，根据定义 $C_q = H_q(X^q, X^{q-1})$，实际上需要验证下图的交换性：

$$\begin{array}{ccc} H_q(X^q, X^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_q(Y^q, Y^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(Y^{q-1}, Y^{q-2}) \end{array}$$

而上图的交换性是由同调序列的自然性导致的。 □

定理 3.1.3. 我们有交换图表：

$$\begin{array}{ccc} H_*(C_*(X)) & \xrightarrow{f_*^C} & H_*(C_*(Y)) \\ \downarrow{\scriptstyle \Theta} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta} \\ H_*(X) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y) \end{array}$$

证明. 根据注 2.4.1 以及奇异同调的自然性，可知我们构造的同构 Θ 也具有自然性。 □

推论 3.1.2. 设 X 是胞腔复形，则

1. $H_q(X)$ 是有限生成阿贝尔群，并且若 X 有 Λ_q 个 q 胞腔，则 $H_q(X)$ 至多有 Λ_q 个生成元；

2. $H_q(X) = 0$，若 X 没有 q 胞腔；

3. 若每相邻的维数中，必有一个维数没有胞腔，则 $H_q(X) = C_q(X) = \bigoplus_{\Lambda_q} \mathbb{Z}$

证明. 对于 (1)，由于 $H_q(X) \cong H_q(C_*(X)) = Z_q(C_q(X))/B_q(C_q(X))$，而 $C_q(X)$ 只有 Λ_q 个生成元，因此 $H_q(X)$ 是有限生成的，并且至多有 Λ_q 个生成元；(2) 显然是 (1) 的直接推论；

对于 (3)，考虑 $H_q(X)$，如果其不存在 q 胞腔，那么自然 $H_q(X) = 0 = \bigoplus_{\Lambda_q} \mathbb{Z}$；如果其存在 q 胞腔，则根据假设其一定不存在 $q+1$ 胞腔和 $q-1$ 胞腔，因此 $\ker \partial_q = C_q(X), \operatorname{im} \partial_{q+1} = 0$，从而

$$H_q(X) = \ker \partial_q / \operatorname{im} \partial_{q+1} = C_q(X) = \bigoplus_{\Lambda_q} \mathbb{Z}$$

□

例 3.1.6. 复射影空间有如下的胞腔分解

$$\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n-2} \cup e^{2n}$$

满足上述推论中的 (3)，即任何两个相邻的维数中一定有一个维数没有胞腔，那么有

$$H_q(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q \text{ 是偶数} \\ 0, & q \text{ 是奇数} \end{cases}$$

例 3.1.7. $S^n \times S^n$，由于 S^n 有胞腔分解 $S^n = e^0 \cup e^n$，那么 $S^n \times S^n$ 自然有胞腔分解

$$S^n \times S^n = e^0 \cup c^n \cup e^n \cup e^{2n}$$

因此

$$H_q(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = n \\ \mathbb{Z}, & q = 2n \end{cases}$$

3.1.1 胞腔的定向

设 X 是胞腔复形,给定其一个 q 维胞腔 e_i^q,并取好一个特征映射 $\varphi_i^q : (D^n, S^{n-1}) \to (\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q)$，首先我们证明下面的结果：

命题 3.1.6. 特征映射 $\varphi_i^q : (D^q, S^{q-1}) \to (\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q)$ 诱导出同调群的同构

$$(\varphi_i^q)_* : H_*(D^q, S^{q-1}) \to H_*(\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q)$$

证明. 注意到 (D^q, S^{q-1}) 和 $(\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q)$ 都是好配对，并且特征映射是相对同胚，从而根据命题 2.4.2 有期待的同构。 □

利用上面的同构，我们可以将圆盘的定向推到胞腔的定向之上，即称 $(\varphi_i^q)_*(\mathcal{E}^n)$ 为 q 胞腔 e_i^q 的自然定向。称取定上述定向的一个 q 胞腔 e_i^q 为一个有向胞腔，仍记为 e_i^q[17]

3.2 胞腔同调的计算

回忆：

$$\bigoplus_{i \in \Lambda_q} H_q(\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q) \cong \bigoplus_{i \in \Lambda_q} H_q(D_i^q, S_i^{q-1}) = H_q(\coprod_{i \in \Lambda_q} (D_i^q, S_i^{q-1})) \xrightarrow{\varphi_*^q} H_q(X^q, X^{q-1}) = C_q(X)$$

其中 φ^q 是粘贴 q 胞腔的映射，其诱导的同调群之前的映射是同构。因此利用上述的同构，$C_q(X)$ 中元素 c_q 的一般形式为

$$c_q = \sum_{i \in \Lambda_q} \lambda_i e_i^q$$

[17]这里我们可能会存在符号上的混用，e_i^q 会代指一个胞腔，一个有向胞腔或者 e_i^q 的自然定向，希望读者留心。

这里 e_i^q 是指胞腔的自然定向，它是 $H_q(\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q)$ 的生成元。

如果我们想要使得胞腔同调可以计算，我们需要解决下面的问题：

1. 设 $f: X \to Y$ 是胞腔映射，$C_q(X)$ 的基为 $\{e_i^q\}_{i\in\Lambda_q}$，$C_q(Y)$ 中的基为 $\{f_j^q\}_{j\in\Lambda_q'}$，那么
$$f_\#^C(e_i^q) = \sum_{j\in\Lambda_q'} F_{ij}^q f_j^q$$
则如何求 F_{ij}^q？

2. 对于边缘同态 ∂_q，我们有
$$\partial_q(e_i^q) = \sum_j [e_i^q : e_j^{q-1}] e_j^{q-1}$$
其中 $[e_i^q, e_j^{q-1}]$ 被称为关联系数，构成的矩阵 $([e_i^q, e_j^{q-1}])_{i,j}$ 被称为关联矩阵，那么我们该如何求关联矩阵？

对于上面两个问题，实际上关键在于，对于一个 q 维胞腔链 c_q，它在 e_i^q 分量上的系数该如何确定？下面的命题告诉了我们该如何计算

命题 3.2.1. 有向胞腔 $\{e_i^q\}_{i\in\Lambda_q}$ 组成 $C_q(X)$ 的基，而一个 q 维胞腔链 c_q 在 e_i^q 上的系数可由含入映射 $\eta_i : (X^q, X^{q-1}) \to (X^q, X^q \backslash e_j^q)$ 诱导的同态得出：
$$(\eta_i)_* : H_q(X^q, X^{q-1}) \to H_q(X^q, X^q \backslash e_j^q) \cong H_q(\overline{e}_j^q, \dot{e}_j^q)$$

证明. 注意到下面映射的复合
$$H_q(\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q) \to \bigoplus_{i\in\Lambda_q} H_q(\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q) \cong \bigoplus_{\Lambda_q} H_q(D^q, S^q) \to H_q(X^q, X^{q-1}) \to H_q(X^q, X^q \backslash e_j^q) \cong H_q(\overline{e}_j^q, \dot{e}_j^q)$$
当 $i = j$ 时是恒同，否则是零映射。

□

3.2.1 胞腔链映射的描述

考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_q(D^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{(\varphi_i)_*} & H_q(X^q, X^{q-1}) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y^q, Y^{q-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_q(Y^q, Y^q \backslash f_j^q) & \xleftarrow{(\varphi_j')_*} & H_q(D^q, S^{q-1}) \\
\downarrow{\pi_*} & & \downarrow{\pi_*} & & \downarrow{\pi_*} & & \downarrow{\pi_*} & & \downarrow{\pi_*} \\
\widetilde{H}_q(D^q/S^{q-1}) & \xrightarrow{(\overline{\varphi_i})_*} & \widetilde{H}_q(X^q/X^{q-1}) & \xrightarrow{\overline{f}_*} & \widetilde{H}_q(Y^q/Y^{q-1}) & \xrightarrow{\overline{i}_*} & \widetilde{H}_q(Y^q/Y^q \backslash f_j^q) & \xleftarrow{(\overline{\varphi_j'})_*} & \widetilde{H}_q(D^q/S^{q-1})
\end{array}$$

其中 φ_i 表示 e_i^q 的特征映射，而 $\overline{\varphi_i}$ 表示 φ_i 在商空间上诱导的映射，由于胞腔耦都是好配对，因此 π_* 都是同构。根据命题 3.2.1，系数 F_{ij}^q 由上面一行的同调群的复合同态给出，因此也应该由下面一行的复合同态给出，即：

命题 3.2.2. F_{ij}^q 等于下面复合映射的度

$$D^q/S^{q-1} \xrightarrow{\overline{\varphi_i}} X^q/X^{q-1} \xrightarrow{\overline{f}} Y^q/(Y^q\backslash f_j^q) \xleftarrow{\overline{\varphi_j'}} D^q/S^{q-1}$$

因此根据命题 2.5.2 中计算度的方法，我们有：

推论 3.2.1. 设 $b \in f_j^q$，若在每一个点 $x \in f^{-1}(b) \cap e_i^q$ 处，$f|_{e_i^q}$ 的 Jacobi 矩阵都非退化，则胞腔链映射 $f_\#^C$ 的系数为

$$F_{ij}^q = \sum_{x \in f^{-1}(b) \cap e_i^q} \operatorname{sgn} \det J_f(x)$$

3.2.2 胞腔边缘同态的描述

设 φ_i, φ_j 分别是胞腔 e_i^q, e_j^{q-1} 的特征映射，$\dot{\varphi}_i := \varphi_i|_{S^{q-1}} : S^{q-1} \to X^{q-1}$ 是 e_j^q 的粘贴映射，则考虑如下交换图表：

$$\begin{tikzcd}
H_q(D^q, S^{q-1}) \arrow[r, "(\varphi_i)_*"] \arrow[d, "\partial_*"] & H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\partial_*"] & H_q(X^{q-1}, X^{q-2}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\pi_*"] & H_q(X^{q-1}, X^{q-1}\backslash e_j^{q-1}) \arrow[d, "\pi_*"] \\
\widetilde{H}_q(S^{q-1}) \arrow[r, "(\dot{\varphi}_i)_*"] & \widetilde{H}_q(X^{q-1}) \arrow[r, "\overline{f}_*"] & \widetilde{H}_q(X^{q-1}/X^{q-2}) \arrow[r, "\bar{i}_*"] & \widetilde{H}_q(X^{q-1}/X^{q-1}\backslash e_j^{q-1})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} & H_{q-1}(D^{q-1}, S^{q-2}) \arrow[l, "(\varphi_j)_*"'] \arrow[d, "\pi_*"] \\
{} & \widetilde{H}_{q-1}(D^{q-1}/S^{q-2}) \arrow[l, "(\overline{\varphi_j})_*"']
\end{tikzcd}$$

同样根据命题 3.2.1 我们有

命题 3.2.3. 关联系数 $[e_i^q : e_j^{q-1}]$ 等于下面复合映射的度

$$S^{q-1} \xrightarrow{\dot{\varphi}_i} X^{q-1} \xrightarrow{\pi} X^{q-1}/X^{q-1}\backslash e_j^{q-1} \xleftarrow{\overline{\varphi}_j} D^{q-1}/S^{q-2}$$

推论 3.2.2. 假设 $b \in e_j^{q-1}$，而 $\dot{\varphi}_i$ 在每一个 $x \in \dot{\varphi}_i^{-1}(b)$ 处的 Jacobi 都非退化，则

$$[e_i^q, e_j^{q-1}] = \sum_{x \in \dot{\varphi}_i^{-1}(b)} \operatorname{sgn} \det J_{\dot{\varphi}_i}(x)$$

3.2.3 实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 的同调群

我们以实射影空间的同调群来结束胞腔同调的计算。回忆 $\mathbb{RP}^n$ 的胞腔结构，$\mathbb{RP}^n$ 是向 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 上粘贴一个 n-胞腔 e^n 得到的，粘贴映射为商掉对径点的商映射 $\pi_{(n-1)}$：

$S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$。并且在每一个维数只有一个胞腔，因此 $C_q(\mathbb{RP}^n)$ 是由 e^q 生成的无限阶循环群。

为了计算关联系数 $[e^q : e^{q-1}]$，取 $b \in e^{q-1}$，它在 $\pi_{(n-1)}$ 下的原像是 S^{q-1} 中的一对对径点 a, a'，并且由于 S^{q-1} 上的对径映射的度为 $(-1)^q$，因此不妨适当调整定向使得 a 的重数为正，则 $[e^q : e^{q-1}] = 1 + (-1)^q$，因此有

$$\underbrace{\mathbb{Z}}_{0\text{ 维}} \xleftarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{1\text{ 维}} \xleftarrow{2} \cdots \xleftarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{奇数维}} \xleftarrow{2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{偶数维}} \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{1+(-1)^n} \underbrace{\mathbb{Z}}_{n\text{ 维}}$$

因此有

$$H_q(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0\text{或 } q = n = \text{ 奇数} \\ \mathbb{Z}_2, & q \text{ 等于奇数且 } 0 < q < n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

但这样的对维数的讨论还是过于繁琐，如果我们调整一下系数，将会非常简洁。

给定一个阿贝尔群 G，下面我们来介绍 G 系数的胞腔同调群，$C_q(X)$ 中的元素形如 $c_q = \sum \lambda_i e_i^q, \lambda_i \in \mathbb{Z}$，把 $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ 改成 $\lambda_i \in G$，形式上我们可以得到 $C_q(X; G) = C_q(X) \otimes G$，则

$$\begin{aligned} \partial c_q &= \sum_{i \in \Lambda_q} \lambda_i \dot{e}_i^q \\ &= \sum_{i \in \Lambda_q} \lambda_i \sum_{j \in \Lambda_{q-1}} [e_i^q, e_j^{q-1}] e_j^{q-1} \\ &= \sum_{j \in \Lambda_{q-1}} (\sum_{i \in \Lambda_q} [e_i^q, e_j^{q-1}] \lambda_i) e_j^{q-1} \end{aligned}$$

则 $C_*(X; G) = \{C_q(X; G), \partial\}$ 是一个链复形，其同调群 $H_*(X; G)$ 称为 G 系数的胞腔同调群。我们断言

$$H_*(X; G) \cong H_*(C_*(X; G))$$

例 3.2.1. 实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 的 $\mathbb{Z}_2$ 系数的同调群 $H_*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$，因此

$$\mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2$$

因此

$$H_q(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & 0 \leq q \leq n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3.3 欧拉示性数与 Morse 不等式

3.3.1 有限阿贝尔群的结构

我们有着以下事实：

1. 任何有限生成的自由阿贝尔群 A 同构于 $\mathbb{Z}^r = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r\text{ 个}}$，其中 r 称为 A 的秩；
2. 每个有限生成阿贝尔群总是某个有限生成自由阿贝尔群的商群；
3. A 是有限生成自由阿贝尔群，B 是 A 的子群，则存在 A 的一组基 $\{a_1, \ldots, a_r\}$ 以及存在自然数 $\{n_1, \ldots, n_s\}, s \leq r$ 满足整除关系 $1 \leq n_1 | n_2 | \ldots | n_s$，使得 $\{n_1 a_1, \ldots, n_s a_s\}$ 是 B 的基。

定理 3.3.1 (有限生成阿贝尔群的构造)**.** 设 A 是有限生成阿贝尔群，A 决定了唯一的非负整数 r 以及一串大于 1 的整数，并且满足整除关系 $n_1 | n_2 | \ldots | n_t$，使得

$$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_t}$$

其中非负整数 r 称为 A 的秩，记做 $r(A)$；$n_1, \ldots, n_r$ 称为 A 的挠系数。

推论 3.3.1. 设 A 是有限生成阿贝尔群，A 的有限阶元素全体组成 A 的一个有限子群 T_A，称为 A 的挠子群，并且 A/T_A 是秩为 r 的自由阿贝尔群，称为 A 的自由部分。

定理 3.3.2. 阿贝尔群的短正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

若 A, B, C 皆有限生成，则 $r(B) = r(A) + r(C)$

定义 3.3.1 (p 分量)**.** 给定有限生成阿贝尔群 A，p 是素数，A 中阶为 p 的方幂的元素组成 A 的子群，记作 $A(p)$，称为 A 的 p 分量。

定义 3.3.2 (p 秩)**.** 给定有限生成阿贝尔群 A，p 是素数，$A(p)$ 的循环群分解为 $\mathbb{Z}_{p^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{m_{t(p)}}}$ 的长度 $t(p)$ 被称为 A 的 p 秩，记作 $r_p(A)$

注 3.3.1. 显然，如果 A 中不存在 p 阶元，则其 p 秩为零。

定理 3.3.3 (有限阿贝尔群的 p 分量分解)**.** 设 A 是有限生成阿贝尔群，则 A 是其 p 分量的直和，其中 p 为素数，即

$$A = \bigoplus_{p\text{ 为素数}} A(p)$$

注 3.3.2. 如果 A 的标准分解式为 $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$，其中 $2 \leq n_1 | n_2 | \ldots | n_k$，则有 t 是 A 的 p 秩的最大值，即 $t = \max_p r_p(A)$

3.3.2 整系数的 Morse 不等式

定理 3.3.4. 设 X 是有限胞腔复形，记 $\beta_q = r(H_q(X))$，称为 X 的 q 维 Betti 数，设 α_q 是 X 中 q 维胞腔的个数。定义 $Z[t]$ 中多项式

$$P_X(t) = \sum_q \beta_q t^q$$
$$Q_X(t) = \sum_q \alpha_q t^q$$

则必存在非负整系数多项式 $R(t)$，使得

$$Q_X(t) - P_X(t) = (1+t)R(t)$$

证明. 在链复形 $\cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \dots$ 中有分解

$$0 \to Z_q \to C_q \to B_{q-1} \to 0$$

$$0 \to B_q \to Z_q \to H_q \to 0$$

根据定理 2.6.2，我们有

$$\sum_q r(C_q)t^q = \sum r(Z_q)t^q + t\sum_q r(B_q)t^q$$
$$\sum_q r(Z_q)t^q = \sum_q r(B_q)t^q + \sum_q r(H_q)t^q$$

两式相加则有

$$\sum_q r(C_q)t^q = \sum_q r(H_q)t^q + (1+t)\sum_q r(B_q)t^q$$

即为我们需要的结论。 □

推论 3.3.2. $\sum_q (-1)^q \alpha_q = \sum_q (-1)^q \beta_q = \chi(X)$，称为 X 的欧拉示性数，是 X 的同伦不变量

证明. 令 $t = -1$ 即可。 □

注 3.3.3. X 的欧拉示性数与 X 的胞腔剖分结构无关。

推论 3.3.3 (第一组 Morse 不等式)**.** 对任意的 q，我们有 $\alpha_q \geq \beta_q$

推论 3.3.4 (第二组 Morse 不等式)**.** 对任意的 q，我们有

$$\alpha_q - \alpha_{q-1} + \cdots + (-1)^q \alpha_0 \geq \beta_q - \beta_{q-1} + \cdots + (-1)^q \beta_0$$

推论 3.3.5 (空缺原理)**.** 如果对所有的 q 都有 $\alpha_q \alpha_{q+1} = 0$，则对任意的 q 都有 $\beta_q = \alpha_q$。

3.3.3 域系数的 Morse 不等式

假定 X 是有限胞腔复形，设 $\beta_q^{\mathbb{F}} = \dim_{\mathbb{F}} H_q(X,\mathbb{F})$，称为 X 的 $\mathbb{F}$ 系数的 q 维 Betti 数，定义 X 的域 $\mathbb{F}$ 系数的 Poincaré 多项式如下：

$$P_X^{\mathbb{F}}(t) = \sum_q \beta_q^{\mathbb{F}} t^q$$

定理 3.3.5. 存在非负系数多项式 $R(t)$ 使得

$$Q_X(t) - P_X^{\mathbb{F}}(t) = (1+t)R(t)$$

证明. 同 $\mathbb{Z}$ 系数。 □

推论 3.3.6. $\chi(X) = \sum_q (-1)^q \beta_q^{\mathbb{F}}$

例 3.3.1. 计算实射影空间的欧拉示性数 $\chi(\mathbb{RP}^n)$：如果我们使用整系数的同调群，其同调群和维数关系很大，讨论起来相对复杂，而如果我们使用 $\mathbb{Z}_2$ 系数的同调群，则对任意的维数我们都有 $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_q(\mathbb{RP}^n,\mathbb{Z}_2) = 1$，因此

$$\chi(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} 1, & n\text{是偶数} \\ 0, & n\text{是奇数} \end{cases}$$

推论 3.3.7 (第一组 Morse 不等式)**.** 对任意的 q，有 $\alpha_q \geq \beta_q^{\mathbb{F}}$

推论 3.3.8 (第二组 Morse 不等式)**.** 对任意的 q，有 $\alpha_q - \alpha_{q-1} + \cdots + (-1)^q \alpha_0 \geq \beta_q^{\mathbb{F}} - \beta_{q-1}^{\mathbb{F}} + \cdots + (-1)^q \beta_0^{\mathbb{F}}$

那么我们自然想问，β_q 和 $\beta_q^{\mathbb{F}}$ 是否相同呢？这是在问不同系数之间的同调群之间有什么关系，之后万有系数定理会告诉我们：

$$\beta_q^{\mathbb{F}}(X) = \begin{cases} \beta_q(X), & \operatorname{char} F = 0 \\ \beta_q(X) + r_p(H_q(X)) + r_p(H_{q-1}(X)) & \end{cases}$$

其中 r_p 是有限生成阿贝尔群的 p 秩。

因此可见 $\beta_q^{\mathbb{F}}(X)$ 与域的特征 p 有关，我们将其写成 $\beta_q^{(p)}(X)$，称为特征 p 的 Betti 数。当域的特征大于零时，$\beta_q^{(p)}(X)$ 可能比 $\beta_q(X)$ 更大，所以特征 p 的 Morse 不等式比整系数的更强。

3.4 Morse 临界点理论

定义 3.4.1 (临界点)**.** 设 M 是光滑流形，$f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$，$p \in M$ 称为 f 的临界点，如果 $\mathrm{d}f|_p = 0$。

定义 3.4.2 (非退化临界点). 光滑函数 f 的临界点 p 被称为非退化的，如果在 p 处的 Hesse 矩阵 $H_p = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ 是非退化的。

注 3.4.1. 我们一般只关心临界点处的 Hesse 矩阵，因为此时的 Hesse 矩阵是对称矩阵。并且微分拓扑的结论告诉我们在对于一个光滑流形上的光滑函数，其非退化临界点是存在的。

定义 3.4.3 (指标). 光滑函数 f 在非退化临界点 p 处的指标定义为 H_p 的负特征值的个数。

引理 3.4.1 (Morse 引理). 若 p 是光滑函数 f 的非退化临界点，其在 p 处的指标为 λ，则存在 p 点的某个邻域内有以 p 为原点的局部坐标 $(y_1, \dots, y_n)$，使得

$$f(x) = f(p) - y_1^2 - \cdots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \cdots + y_n^2$$

推论 3.4.1. 非退化的临界点是孤立的。

定义 3.4.4 (Morse 函数). 光滑函数 f 被称为 Morse 函数，如果其所有的临界点都非退化。

Morse 理论的关键则在于，将 Morse 函数与胞腔同调联系了起来：设 f 是光滑函数，定义

$$M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}, \quad M_a^b = \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\}$$

引理 3.4.2. 设 M_a^b 中无临界点，则 M^a 与 M^b 微分同胚，并且 M^a 是 M^b 的形变收缩核。

引理 3.4.3. 设 M_a^b 中只有一个非退化临界点,其指数为 λ,则有同胚 $M^b \cong M^a \cup_{\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}} D^\lambda \times D^{n-\lambda}$，因而 M^b 同伦等价于 M^a 上贴一个 λ 维胞腔，即 $M^b \simeq M^a \cup e^\lambda$。

定理 3.4.1. 设 M 是 n 维光滑流形，f 是 M 上任意一个 Morse 函数，则

1. M 同伦等价于一个有限胞腔复形，其 q 维胞腔一一对应于 f 指数为 q 的临界点，其关联系数也可由 f 决定；

2. 设 μ_q 是 f 指数为 q 的临界点的个数，定义 $Q_f(t) = \sum_q \mu_q t^q$，称为 f 的 Morse 多项式，则存在非负整系数多项式 $R(t)$，使得

$$Q_f(t) - P_X(t) = (1+t)R(t)$$

注 3.4.2. 之前关于 q 维胞腔个数 α_q 的不等式都可以改写成 Morse 函数临界点个数 μ_q 的不等式。

例 3.4.1. $\mathbb{RP}^n$ 上的 Morse 函数至少有 $n+1$ 个临界点。

证明. 由于 $\mathbb{RP}^n$ 的 $\mathbb{Z}_2$ 系数的 Betti 数都是 1，因此由第一组 Morse 不等式，有 $\alpha_q \geq \beta_q^{\mathbb{Z}_2} = 1$。从而任取 $0 \leq q \leq n$，根据定理 3.5.1，Morse 函数 f 都至少存在一个指数为 q 的临界点，因此至少有 $n+1$ 个临界点。 □

例 3.4.2. 环面 T^2 上的 Morse 函数至少有 4 个临界点。

证明. 由于 T^2 的整系数同调群

$$H_q(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

从而根据第一组 Morse 不等式，我们有 $\alpha_0 \geq 1, \alpha_1 \geq 2, \alpha_2 \geq 1$，从而至少有 4 个临界点。 □

习题 3.4.1. 设可定向闭曲面 M 上的一个 Morse 函数 f 只有一个极大点，也只有一个极小点。证明 f 的鞍点个数等于 M 的 1 维 Betti 数。

证明. 首先根据可定向闭曲面的整系数同调群我们有 $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2n, \beta_2 = 1$，从而 $\mu_0 \geq 1, \mu_2 \geq 1, \mu_1 \geq 2n$。注意到极大点的个数为 μ_2, 极小点的个数为 μ_0，则该题让我们证明当 $\mu_0 = \mu_2 = 1$ 时，$\mu_1 = 2n$。利用 $Q_f(t) = P_X(t) + (1+t)R(t)$，我们有

$$t^2 + \mu_1 t + 1 = t^2 + 2nt + 1 + (1+t)R(t)$$

根据系数关系，我们只能有 $\deg R(t) = 0$，进而强迫 $R(t) = 0$，从而 $\mu_1 = 2n$ □

4 万有系数定理

4.1 朴素形式

定义 4.1.1 (自由链复形)**.** 链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 中每个 C_q 都是自由阿贝尔群，则称为自由链复形。

定理 4.1.1. 设 C 和 C' 都是自由链复形，那么 C 和 C' 链同伦等价的充要条件是它们的同调群同构。

推论 4.1.1. 设 C 和 C' 都是自由链复形，并且 $H_*(C) \cong H_*(C')$，则对任意系数群 G，都有

$$H_*(C; G) \cong H_*(C'; G), \quad H^*(C; G) \cong H^*(C'; G)$$

证明. 如果 C 同伦等价于 C'，那么 $C \otimes G$ 同伦等价于 $C' \otimes G$，$\mathrm{Hom}(C, G)$ 同伦等价于 $\mathrm{Hom}(C', G)$。 □

由于拓扑空间 X 的奇异链复形以及胞腔链复形都是自由链复形，因此：

推论 4.1.2. 对于空间 X 和空间偶 (X,A)，其整系数的奇异同调完全决定其任意系数的奇异同调和上同调。

推论 4.1.3. 对于胞腔复形 X 和复形偶 (X,A)，其任意系数的奇异同调与上同调都可以通过胞腔链复形来计算。

那么问题在于，怎么通过 $H_*(X)$ 导出 $H_*(X;G)$ 以及 $H^*(X;G)$，下面是一个具体的例子：

例 4.1.1. 设有限胞腔复形 X 的同调群为 $H_0(X)=\mathbb{Z}, H_1(X)=\mathbb{Z}_3$，其他的同调群都为零，则我们可以计算 $H_*(X,\mathbb{Z}_2), H_*(X,\mathbb{Z}_3)$ 如下：

取一个自由链复形 C，使得 $H_*(C)=H_*(X)$。这样的 C 也是容易构造的，先取 C' 为

$$0 \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{0\text{维}} \to 0$$

显然此时 $H_0(C')=\mathbb{Z}, H_q(C')=0, q\neq 0$；再取 C'' 如下

$$0 \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{2\text{维}} \xrightarrow{3} \underbrace{\mathbb{Z}}_{1\text{维}} \to 0$$

此时有 $H_1(C'')=\mathbb{Z}_3, H_q(C'')=0, q\neq 1$；将 C' 与 C'' 做直和，我们有

$$0 \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{2\text{维}} \xrightarrow{3} \underbrace{\mathbb{Z}}_{1\text{维}} \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{0\text{维}} \to 0$$

显然 C 是自由链复形，且 $H_*(C)\cong H_*(X)$，从而 C 与 X 的奇异链复形同伦等价，我们将链复形张量 $\mathbb{Z}_2$ 后依然同伦等价，即有 $H_q(X;\mathbb{Z}_2)\cong H_q(C;\mathbb{Z}_2) = H_q(C';\mathbb{Z}_2)\oplus H_q(C'';\mathbb{Z}_2)$，而分别计算这两个是容易的：

$$C'\otimes\mathbb{Z}_2:\quad 0 \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{0\text{维}} \to 0$$

$$C''\otimes\mathbb{Z}_2:\quad 0 \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{2\text{维}} \xrightarrow{1} \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{1\text{维}} \to 0$$

直接计算可知：

$$H_q(C';\mathbb{Z}_2)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & p=0\\ 0, & p\neq 0\end{cases}\quad H_q(C'';\mathbb{Z}_2)=0, \forall p\geq 0$$

从而

$$H_q(C;\mathbb{Z}_2)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & p=0\\ 0, & p\neq 0\end{cases}$$

同理可以计算 $H_*(X;\mathbb{Z}_3)$，唯一不同的地方在于 $\times 3$ 这个映射在 $\mathbb{Z}_3$ 是零映射而不是单位映射。

实际上，上面例子体现出来的思想是普遍适用的，我们把一般形式写出来。

定义 4.1.2 (初等链复形)**.** 我们定义如下的链复形为初等链复形：

$$E(\mathbb{Z},n):\quad 0\to\underbrace{\mathbb{Z}}_{n\text{维}}\to 0$$
$$E(\mathbb{Z}_k,n):\quad 0\to\underbrace{\mathbb{Z}}_{n+1\text{维}}\xrightarrow{k}\underbrace{\mathbb{Z}}_{n\text{维}}\to 0$$

注 4.1.1. 很容易计算得到：

$$H_q(E(\mathbb{Z},n))=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=n\\ 0, & q\neq n\end{cases},\quad H_q(E(\mathbb{Z}_k,n))=\begin{cases}\mathbb{Z}_k, & q=n\\ 0, & q\neq n\end{cases}$$

约定 4.1.1. 我们用记号 G_k 表示映射 $G\xrightarrow{k}G$ 的余核，用 ${}_kG$ 表示映射 $G\xrightarrow{k}G$ 的核，则有下面的正合列：

$$0\to{}_k G\to G\xrightarrow{k}G_k\to 0$$

直接计算，我们可以发现

$$H_q(E(\mathbb{Z},n);G)=H^q(E(\mathbb{Z},n);G)=\begin{cases}G, & q=n\\ 0, & q\neq n\end{cases}$$

以及

$$H_q(E(\mathbb{Z}_k,n);G)=\begin{cases}G_k, & q=n\\ {}_kG, & q=n+1\\ 0, & q\neq n,n+1\end{cases},\quad H^q(E(\mathbb{Z}_k,n);G)=\begin{cases}{}_kG, & q=n\\ G_k, & q=n+1\\ 0, & q\neq n,n+1\end{cases}$$

定理 4.1.2 (万有系数定理的朴素形式)**.** 设 X 是有限胞腔复形，如果 $H_q(X)=\bigoplus_{i=1}^{\beta_q}\mathbb{Z}\oplus\bigoplus_{i=1}^{\gamma_q}\mathbb{Z}_{k_i^{(q)}}$[18]，则我们有

$$H_q(X;G)=\bigoplus_{i=1}^{\beta_q}G\oplus(\bigoplus_{i=1}^{\gamma_q}G_{k_i^{(q)}})\oplus(\bigoplus_{i=1}^{\gamma_{q-1}}{}_{k_i^{(q-1)}}G)$$
$$H^q(X;G)=\bigoplus_{i=1}^{\beta_q}G\oplus(\bigoplus_{i=1}^{\gamma_q}{}_{k_i^{(q)}}G)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{\gamma_{q-1}}G_{k_i^{(q-1)}})$$

[18]其中 β_q 是 q 维 Betti 数，$k_i^{(q)}$ 是 $H_q(X)$ 的挠系数。

证明. 利用初等链复形，我们可以构造如下的自由链复形：

$$D = \bigoplus_q (\bigoplus_{i=1}^{\beta_q} E(\mathbb{Z}, q) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_q} E(\mathbb{Z}_{k_i^{(q)}}, q))$$

显然我们有 $H_*(D) = H_*(X)$，因此由定理 4.1.1，我们可以用 D 代替 X 的奇异链复形来计算同调群与上同调群。再利用注 4.1.1 关于初等链复形同调群与上同调群的计算则可以得到我们需要的结果。 □

注意到 ${}_k\mathbb{Z} = 0$，则有下面的结果：

推论 4.1.4. 设 X 是有限胞腔复形，$H_q(X) = \mathbb{Z}^{\beta_q} \oplus T_q$，其中 T_q 是挠子群，则

$$H^q(X) = \mathbb{Z}^{\beta_q} \oplus T_{q-1}$$

最后我们来看如果 G 是域 $\mathbb{F}$ 的情况：

推论 4.1.5. X 是有限胞腔复形，$\mathbb{F}$ 是特征为 p 的域，用 β_q 记 q 维 Betti 数；当 p 是素数时，记 $\gamma_q^{(p)}$ 是 $H_q(X)$ 的 p 秩 $r_pH_q(X)$，则：

1. $H_q(X;\mathbb{F})$ 与 $H^q(X;\mathbb{F})$ 作为 $\mathbb{F}$ 上的向量空间有相同的维数，记作 $\beta_q^{(p)}$，并且
2. $$\beta_q^{(p)} = \begin{cases} \beta_q, & p = 0 \\ \beta_q + \gamma_q^{(p)} + \gamma_{q-1}^{(p)}, & p \neq 0 \end{cases}$$

习题 4.1.1. 利用万有系数定理计算闭曲面的上同调群

证明. 可定向闭曲面：根据已有结果，亏个为 g 的可定向的闭曲面 Σ_g 的同调群为

$$H_q(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & q = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

然而其都无挠部分，因此根据推论 4.1.4 可知其上同调群与下同调群是同构的。

不可定向闭曲面：根据已有结果，不可定向的闭曲面 $m\mathbb{P}^2$ 的同调群为

$$H_q(m\mathbb{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & q = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

从而其上同调群如下：

$$H^q(m\mathbb{P}^2)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0\\ \mathbb{Z}^{m-1}, & q=1\\ \mathbb{Z}_2, & q=2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

□

习题 4.1.2. 计算环面 T 和 Klein 瓶的 $\mathbb{Z}_2$ 系数的同调群。

证明. 首先来计算环面：根据已有结果，环面 T 的同调群为

$$H_q(T)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=2,0\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & q=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于其不存在挠元素，根据万有系数定理其 $\mathbb{Z}_2$ 系数的同调群是简单的：

$$H_q(T;\mathbb{Z}_2)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & q=0,2\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, & q=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

下面来计算 Klein 瓶 K，我们先计算其同调群：我们可以将 K 视作利用映射 $f: D^2\supset S^1\to\bigvee_2 S^1$ 向 $\bigvee_2 S^1$ 上粘贴一个 2 胞腔得到，f 的映射规则可以用 $aba^{-1}b$ 来表示，从而有：

$$0\to\widetilde{H}_2(\bigvee_2 S^1)\to\widetilde{H}_2(K)\to\widetilde{H}_1(S^1)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_1(\bigvee_2 S^1)\to\widetilde{H}_1(K)\to 0$$

其中 $f_*(1)=(0,2)$，从而 $\widetilde{H}_2(K)=\ker f_*,\widetilde{H}_1(K)=\operatorname{coker} f_*$，即

$$\widetilde{H}_q(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & q=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

下面再利用万有系数定理计算其 $\mathbb{Z}_2$ 系数的同调群：注意到 $(\mathbb{Z}_2)_2=\mathbb{Z}_2, {}_2\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}_2$，从而

$$H_q(K;\mathbb{Z}_2)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & q=0,2\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, & q=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

□

习题 4.1.3. 设有阿贝尔群的短正合列：

$$0 \to G' \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} G'' \to 0$$

则有链复形的短正合列：

$$0 \to S_*(X;G) \xrightarrow{\phi} S_*(X;G) \xrightarrow{\psi} S_*(X;G'') \to 0$$

因而有同调群的长正合列：

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X;G') \xrightarrow{\phi_*} H_q(X;G) \xrightarrow{\psi_*} H_q(X;G'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X;G') \to \dots$$

习题 4.1.4. 设 T 是环面，K 是 Klein 瓶，$f : T \to K$ 是任意映射，证明 $f_* : H_2(T;\mathbb{Z}_2) \to H_2(K,\mathbb{Z}_2)$ 是零映射。

证明. 利用习题 4.1.3，我们取阿贝尔群短正合如下

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

我们可以导出同调群的长正合列，由于这种操作是自然的，因此 $f : T \to K$，我们有其诱导的同调群层面的映射的正合列：

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_2(T) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_2(T) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_2(T;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_2(K) \arrow[r] & H_2(K) \arrow[r] & H_2(K;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

由习题 4.1.2 的计算结果，我们知道 $H_2(K) = 0$，因此利用图表的交换性 $f_* : H_2(K;\mathbb{Z}_2) \to H_2(T;\mathbb{Z}_2)$ 始终是零映射。 □

4.2 Ext 与 Tor 函子

定义 4.2.1 (自由预解)**.** 给定阿贝尔群 H，以及自由阿贝尔群 $F_0, F_1, \dots$，使得有下面的正合列：

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to H \to 0$$

称为 H 的自由预解。

定义 4.2.2 (Tor)**.** 给定阿贝尔群 H, G，定义 $\mathrm{Tor}(H,G)$ 如下：任取 H 个一个自由预解 $\cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$，用 G 去张量这个正合列得到

$$(F;G): \quad \cdots \to F_2 \otimes G \xrightarrow{f_2 \otimes \mathrm{id}_G} F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}_G} F_0 \otimes G \xrightarrow{f_0 \otimes \mathrm{id}_G} H \otimes G \to 0$$

则定义 $\mathrm{Tor}(G,H) = H_1(F;G) = \ker f_1 \otimes \mathrm{id}_G \,/\, \mathrm{im}\, f_2 \otimes \mathrm{id}_G$

注 4.2.1. Tor 的定义与自由预解的选取实际上是无关的，即选取不同的自由预解得到的 $\mathrm{Tor}(G,H)$ 是同构的，这实际上是由下面的引理保证的：

引理 4.2.1. 给定 H 的自由预解 F 和 F'，任给同态 $\alpha: H \to H$，则 α 可以延拓成链映射 $F \to F'$，即：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\
\dots & \longrightarrow & F_2' & \longrightarrow & F_1' & \longrightarrow & F_0' & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

并且任何两个不同的 $\alpha, \alpha': H \to H$ 延拓成的链映射是同伦的。

注 4.2.2. 我们还可以定义 $\mathrm{Tor}_n(H,G)$ 为 $H_n(F;G), n \geq 1$，但实际上有效的信息只有 Tor_1，这是因为对于任何一个阿贝尔群，其一定存在如下的自由预解：

$$\cdots \to 0 \to 0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$$

从而 $\mathrm{Tor}_n(H,G) = H_n(F;G) = 0$。

定义 4.2.3 (Ext)**.** 给定阿贝尔群 H, G，定义 $\mathrm{Ext}_1(H,G)$ 如下：任取 H 个一个自由预解 $\cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$，用 $\mathrm{Hom}(-,G)$ 作用这个正合列得到

$$(F;G): \quad \cdots \leftarrow \mathrm{Hom}(F_2,G) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(f_2,G)} \mathrm{Hom}(F_1,G) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(f_1,G)} \mathrm{Hom}(F_0,G) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(f_0,G)} \mathrm{Hom}(H,G) \leftarrow 0$$

则定义 $\mathrm{Ext}_1(G,H) = H^1(F;G) = \ker \mathrm{Hom}(f_2,G)/\operatorname{im}\mathrm{Hom}(f_1,G)$

命题 4.2.1 (Ext 的性质)**.** 对于 Ext，我们有以下性质：

1. $\mathrm{Ext}(H \oplus H', G) = \mathrm{Ext}(H,G) \oplus \mathrm{Ext}(H',G)$;
2. 当 H 自由时，$\mathrm{Ext}(H,G) = 0$
3. $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, B) = B_n$

证明. (1) 是显然的，对于 (2) 来说，取如下自由预解也是显然的：

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \to 0$$

(3) 考虑 $\mathbb{Z}_n$ 如下的自由预解

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0$$

用 $\mathrm{Hom}(-,B)$ 函子作用后得到

$$0 \leftarrow B \xleftarrow{\times n} B \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, B) \leftarrow 0$$

从而 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, B) = B/\operatorname{im}(\times n) = B_n$ □

命题 4.2.2 (Tor 的性质)**.** 对于 Tor，我们有以下性质：

1. $\mathrm{Tor}(A,B)=\mathrm{Tor}(B,A)$；
2. $\mathrm{Tor}(A_1\oplus A_2,B)=\mathrm{Tor}(A_1,B)\oplus\mathrm{Tor}(A_2,B)$；
3. 当 A 或 B 自由时，$\mathrm{Tor}(A,B)=0$；
4. $\mathrm{Tor}(A,B)=\mathrm{Tor}(T_A,B)$，其中 T_A 是 A 的挠子群；
5. $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n,B)={}_nB$

证明. (1) 是由于 $A\otimes B=B\otimes A$，(2) (3) 的证明同命题 4.2.1，(4) 是 (2) 与 (3) 的直接推论，下面只需要计算 (5)，同样取如下预解

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\times n}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n\to 0$$

张量后得到

$$0\to B\xrightarrow{\times n}B\to\mathbb{Z}_n\otimes B\to 0$$

从而 $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n,B)=\ker(\times n)={}_nB$ □

为了证明万有系数定理正合列的分裂性，我们还需要最后一个代数上的引理：

引理 4.2.2. 如果正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是裂正合的，那么

$$0\to A\otimes G\to B\otimes G\to C\otimes G\to 0$$
$$0\to\mathrm{Hom}(C,G)\to\mathrm{Hom}(B,G)\to\mathrm{Hom}(A,G)\to 0$$

都是裂正合的。

证明. 由于 $0\to A\to B\to C\to 0$ 裂正合，从而 $B=A\oplus C$，从而

$$B\otimes G=(A\oplus B)\otimes G=(A\otimes G)\oplus(B\otimes G)$$

即

$$0\to A\otimes G\to B\otimes G\to C\otimes G\to 0$$

裂正合，类似可以证明第二个序列是裂正合的。关键的原因在于张量函子与 Hom 函子与直和都是可交换的。 □

定理 4.2.1 (万有系数定理)**.** 设 C 是自由链复形，则有裂正合列

$$0\to H_n(C)\otimes G\to H_n(C;G)\to\mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),G)\to 0$$

证明. 考虑裂正合的链正合列，其中 Z_*, B_{*-1} 中的链映射都是零映射：

$$0 \to Z_* \to C_* \to B_{*-1} \to 0$$

进而有裂正合的链正合列：

$$0 \to Z_* \otimes G \to C_* \otimes G \to B_{*-1} \otimes G \to 0$$

其诱导出长正合列

$$\cdots \to B_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes \mathrm{id}_G} Z_n \otimes G \to H_n(C;G) \to B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{i_{n-1} \otimes \mathrm{id}_G} Z_{n-1} \otimes G \to \dots$$

从中我们可以提取出短正合列：

$$0 \to \mathrm{coker}(i_n \otimes \mathrm{id}_G) \to H_n(C;G) \to \ker(i_{n-1} \otimes \mathrm{id}_G) \to 0$$

因此我们只需要搞清楚映射 $i_n \otimes \mathrm{id}_G$ 的核与余核即可：考虑 $H_{n-1}(C)$ 如下的一个自由预解：

$$0 \to B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \to H_n(C) \to 0$$

张量 G 可以得到如下的序列：

$$0 \to \underbrace{B_n \otimes G}_{3} \xrightarrow{i_n \otimes \mathrm{id}_G} \underbrace{Z_n \otimes G}_{2} \to \underbrace{H_n(C) \otimes G}_{1} \to 0$$

由于张量函子是一个右正合函子，从而上述序列在 (1), (2) 处都正合，在 (3) 处可能不正合，而这恰好是由 $\mathrm{Tor}(H_{n-1}(C), G)$ 刻画，因此

$$\begin{aligned} \mathrm{coker}(i_n \otimes \mathrm{id}_G) &= H_n(C) \otimes G \\ \ker(i_n \otimes \mathrm{id}_G) &= \mathrm{Tor}(H_n(C), G) \end{aligned}$$

□

定理 4.2.2 (上同调形式的万有系数定理)**.** 设 C 是自由链复形，则有裂正合列

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(H_n(C), G) \leftarrow H^n(C;G) \leftarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C), G) \to 0$$

证明. 同样考虑复形的裂正合列

$$0 \to Z_* \to C_* \to B_{*-1} \to 0$$

用 Hom 作用后得到：

$$0 \to \mathrm{Hom}(B_{*-1}, G) \to \mathrm{Hom}(C_*, G) \to \mathrm{Hom}(Z_*, G) \to 0$$

导出同调群的长正合列：

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}(B_n, G) \leftarrow \mathrm{Hom}(Z_n, G) \leftarrow H^n(C;G) \leftarrow \mathrm{Hom}(B_{n-1}, G) \leftarrow \mathrm{Hom}(Z_{n-1}, G) \leftarrow \dots$$

从其中分裂出

$$0 \leftarrow \ker(\mathrm{Hom}(i_n, G)) \leftarrow H^n(C;G) \leftarrow \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(i_{n-1}, G)) \leftarrow 0$$

同样考虑 $H_n(C)$ 的如下自由预解去计算 Ext 即可

$$0 \to B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \to H_n(C) \to 0$$

$\square$

推论 4.2.1 (拓扑形式)**.** 设 X 是拓扑空间，则有裂正合列：

$$0 \to H_n(X) \otimes G \to H_n(X;G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G) \to 0$$
$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(H_n(X), G) \leftarrow H^n(X;G) \leftarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), G) \leftarrow 0$$

注 4.2.3. 我们有以下的注记：

1. $\mathbb{Z}$ 系数的奇异同调群 $H_*(X)$ 完全决定了任意 G 系数的同调群与上同调群；
2. 上述万有系数公式可推广到空间偶的相对同调群；
3. 当我们在万有系数定理中取 $n=0$, 由于 $H_{-1}(X)=0$, 从而 $\mathrm{Tor}(H_{-1}(X),G)=\mathrm{Ext}(H_{-1}(X),G) = 0$；取 $n=1$，由于 $H_0(X)$ 始终是自由的，此时仍有 $\mathrm{Tor}(H_0(X),G)=\mathrm{Ext}(H_0(X),G)=0$，因而我们有：
$$H_1(X;G) \cong H_1(X) \otimes G, \quad H_1(X;G) \cong H_1(X) \otimes G$$
$$H^0(X;G) \cong \mathrm{Hom}(H_0(X),G), \quad H^1(X;G) \cong \mathrm{Hom}(H_1(X),G)$$
4. 如果我们取 G 为特征 0 的域 $\mathbb{F}$，由于 $\mathrm{Ext}(-,\mathbb{F}) = \mathrm{Tor}(-,\mathbb{F}) = 0$，从而
$$H_n(X;\mathbb{F}) = H_n(X) \otimes \mathbb{F}$$
$$H^n(X;\mathbb{F}) = \mathrm{Hom}(H_n(X),\mathbb{F})$$
常见的如 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

推论 4.2.2. X 是拓扑空间，p 是素数，假定 $H_n(X)$ 以及 $H_{n-1}(X)$ 都是有限生成的，则

$$H_n(X;\mathbb{Z}_p) = \underbrace{(\bigoplus \mathbb{Z}_p)}_{1} \oplus \underbrace{(\bigoplus \mathbb{Z}_p)}_{2} \oplus \underbrace{(\bigoplus \mathbb{Z}_p)}_{3}$$

其中 $H_n(X)$ 中的每一个 $\mathbb{Z}$ 在 (1) 中贡献一个 $\mathbb{Z}_p$ 的直和项，$H_n(X)$ 中的每个 $\mathbb{Z}_{p^k}, k \geq 1$ 直和项在 (2) 中贡献一个 $\mathbb{Z}_p$ 的直和项，$H_{n-1}(X)$ 中的每个 $\mathbb{Z}_{p^k}, k \geq 1$ 直和项在 (3) 中贡献一个 $\mathbb{Z}_p$ 的直和项。

证明. 根据万有系数定理，我们有

$$H_n(X;\mathbb{Z}_p) = H_n(X) \otimes \mathbb{Z}_p \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}_p)$$

第一部分由 $H_n(X)$ 中的自由部分与 $\mathbb{Z}_p$ 做张量贡献；注意到 $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_d$，其中 $d = \gcd(m, n)$，从而 $H_n(X)$ 中的每一个 $\mathbb{Z}_{p^k}$ 分量与 $\mathbb{Z}_p$ 作张量都会贡献一个 $\mathbb{Z}_p$，这组成了第二部分；第三部分根据 Tor 的性质同理。 □

推论 4.2.3. *X 是拓扑空间，并且 $H_n(X)$ 都是有限生成的，$\mathbb{F}$ 是域，则 $H^n(X;\mathbb{F}) \cong (H_n(X;\mathbb{F}))^*$ 作为有限维线性空间是互为对偶的。*

证明. 根据万有系数定理，我们有

$$H_n(X;\mathbb{F}) = H_n(X) \otimes \mathbb{F} \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), \mathbb{F})$$
$$H^n(X;\mathbb{F}) = \mathrm{Hom}(H_n(X), \mathbb{F}) \oplus \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{F})$$

对于有限维线性空间 V, W，我们有如下的同构

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$$

因此有

$$\mathrm{Hom}(H_n(X), \mathbb{F}) \cong H_n^*(X) \otimes \mathbb{F} \cong (H_n(X) \otimes \mathbb{F})^*$$

因此只需要对 Tor 和 Ext 证明类似的对偶关系即可，根据其性质，只需要对任意的 n 证明下面的对偶关系：

$$({}_n\mathbb{F})^* = \mathbb{F}_n$$

这实际上是广泛成立的，即如果 $T : V \to W$ 是有限维线性空间之间的映射，$T^* : W^* \to V^*$ 是其对偶映射，那么 $\ker T = \operatorname{coker} T^*, \operatorname{coker} T = \ker T^*$ □

推论 4.2.4. *X 是拓扑空间，若满足 $H_n(X)$ 和 $H_{n-1}(X)$ 都是有限生成，挠子群分别记作 $T_n(X), T_{n-1}(X)$，则*

$$H^n(X) \cong (H_n(X)/T_n(X)) \oplus T_{n-1}(X)$$

证明. 根据万有系数定理，我们有

$$H^n(X) = \mathrm{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z})$$

根据 Ext 的性质，我们有 $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = T_{n-1}(X)$，因此我们实际上只需要验证

$$\mathrm{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \cong H_n(X)/T_n(X)$$

即 $H_n(X)$ 的挠部分不做任何贡献，这实际上只需要证明对任意的 m，有

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = 0$$

显然，任取 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z})$，我们有

$$0 = f(m) = mf(1) \implies f(1) = 0$$

即 f 是零映射。 □

注 4.2.4. 下面的命题告诉我们，$\mathbb{Q}$ 系数和 $\mathbb{Z}_p$ 系数"基本上"反映了 $H_*(X, \mathbb{Z})$ 的全部信息：

命题 4.2.3. 我们有如下结果：

1. $H_*(X; \mathbb{Z}) = 0$ 当且仅当 $H_*(X; \mathbb{Q}) = 0$ 且 $H_*(X; \mathbb{Z}_p) = 0$，对任意的素数 p
2. 映射 $f : X \to Y$ 诱导同态 $f_* : H_*(X; \mathbb{Z}) \to H_*(Y; \mathbb{Z})$ 是同构当且仅当 $f_* : H_*(X; \mathbb{Q}) \to H_*(Y; \mathbb{Q})$ 以及 $f_* : H_*(X; \mathbb{Z}_p) \to H_*(Y; \mathbb{Z}_p)$ 对任意的素数 p

5 乘积与 Poincaré 对偶

5.1 奇异上链的上积与卡积

回忆 n 维标准单形 Δ_n 定义为

$$\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \le x_i \le 1, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$$

而利用标准单形可以去构造线性单形，给定 $\mathbb{R}^m$ 中的点 $c_0, \dots, c_n$，则定义

$$\begin{aligned}(c_0, \dots, c_n) : \Delta &\to \mathbb{R}^m \\ \sum x_i e_i &\mapsto \sum x_i c_i\end{aligned}$$

在本节中，约定 X 是拓扑空间。

定义 5.1.1 (前 p 维面)**.** 设 $\sigma : \Delta_n \to X$ 是一个 n 维奇异单形，$0 \le p \le n$，${}_p\sigma$ 称为 σ 的前 p 维面，定义为

$${}_p\sigma = \sigma \circ (e_0 \dots e_p) : \Delta_p \to X$$

定义 5.1.2 (后 $n-p$ 维面)**.** σ_{n-p} 被称为 σ 的后 $n-p$ 维面，定义为

$$\sigma_{n-p} = \sigma \circ (e_p \dots e_n) : \Delta_{n-p} \to X$$

定义 5.1.3 (上积)**.** 任取 $\sigma \in S^p(X), \beta \in S^q(X)$ 是 X 中的 p, q 维奇异上链，定义

$$\alpha \cup \beta \in S^{p+q}(X)$$

为如下的 $p+q$ 维奇异上链：对任意的 $p+q$ 维奇异单形 σ，有

$$\langle \alpha \cup \beta, \sigma \rangle = \langle \alpha, {}_p\sigma \rangle \cdot \langle \beta, \sigma_q \rangle$$

得到一个双线性的上积运算 $S^p(X) \times S^q(X) \xrightarrow{\cup} S^{p+q}(X)$

命题 5.1.1. 设 $\alpha \in S^p(X), \beta \in S^q(X)$，则

$$\delta(\alpha \cup \beta) = \delta\alpha \cup \beta + (-1)^p \alpha \cup \delta\beta$$

证明. 任取一个 $p+q+1$ 维的奇异单形 $\sigma : \Delta_{p+q+1} \to X$，有

$$\begin{aligned}
\langle \delta(\alpha \cup \beta), \sigma \rangle &= \langle \alpha \cup \beta, \partial\sigma \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \langle \alpha \cup \beta, \sigma \circ (e_0 \ldots \widehat{e_i} \ldots e_{p+q+1}) \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \langle \alpha, \sigma \circ (e_0 \ldots \widehat{e_i} \ldots e_{p+1}) \rangle \langle \beta, \sigma \circ (e_{p+1} \ldots e_{p+q+1}) \\
&\quad + \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i \langle \alpha, \sigma \circ (e_0 \ldots e_p) \langle \beta, \sigma \circ (e_p \ldots \widehat{e_i} \ldots e_{p+q+1}) \rangle \\
&= \langle \alpha, \partial\,{}_{p+1}\sigma \rangle \langle \beta, \sigma_q \rangle + (-1)^p \langle \alpha, {}_p\sigma \rangle \langle \beta, \partial\sigma_{q+1} \rangle \\
&= (\delta\alpha \cup \beta + (-1)^p \alpha \cup \delta\beta)(\sigma)
\end{aligned}$$

□

注 5.1.1. 在微分形式中，取 $\alpha \in \Omega^p(M), \beta \in \Omega^q(M)$，$M$ 是 n 维流形，则

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$$

命题 5.1.2. 定义上积

$$\begin{gathered}
H^p(X) \times H^q(X) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X) \\
([\alpha], \beta) \mapsto [\alpha \cup \beta]
\end{gathered}$$

证明. 验证定义良好：首先 α 闭，β 闭则有 $\alpha \cup \beta$ 闭，直接验证如下：

$$\delta(\alpha \cup \beta) = \delta\alpha \cup \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \cup \delta\beta = 0$$

并且与代表元选取无关：设 $\alpha - \alpha' = \delta w$，则：

$$\begin{aligned}
\alpha' \cup \beta - \alpha \cup \beta &= (\alpha' - \alpha) \cup \beta \\
&= \delta\omega \cup \gamma \\
&= \delta(w \cup \beta)
\end{aligned}$$

□

定理 5.1.1. 上链的上积有以下性质：

1. 结合性：对任意的 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in S^*(X)$，有 $(\alpha_1\cup\alpha_2)\cup\alpha_3=\alpha_1\cup(\alpha_2\cup\alpha_3)$；
2. 存在单位：存在 $e_X\in S^0(X)$，代表在每个点上取值都是 1 的零维奇异上链，则 e_X 是上链的上积中的单位元；
3. 自然性：$f:X\to Y$ 是映射，则 $f^{\#}(e_Y)=e_X$，且

$$f^{\#}(\beta_1\cup\beta_2)=f^{\#}(\beta_1)\cup f^{\#}(\beta_2),\quad \beta_1,\beta_2\in S^*(Y)$$

即下图交换

$$\begin{array}{ccc} S^p(X)\times S^q(X) & \xrightarrow{\cup} & S^{p+q}(X)\\ {\scriptstyle f_\#}\uparrow \quad \uparrow{\scriptstyle f_\#} & & {\scriptstyle f_\#}\uparrow\\ S^p(Y)\times S^q(Y) & \xrightarrow{\cup} & S^{p+q}(Y)\end{array}$$

定理 5.1.2. 上同调的上积有以下性质：

1. 结合性：对任意的 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in H^*(X)$，有 $(\xi_1\cup\xi_2)\cup\xi_3=\xi_1\cup(\xi_2\cup\xi_3)$；
2. 存在单位：存在 $e_X\in H^0(X)$，使得 e_X 是上同调的上积中的单位元；
3. 自然性：$f:X\to Y$ 是映射，则 $f^{\#}(e_Y)=e_X$，且

$$f^*(\xi_1\cup\xi_2)=f^*(\xi_1)\cup f^*(\xi_2),\quad \xi_1,\xi_2\in H^*(Y)$$

即下图交换

$$\begin{array}{ccc} H^p(X)\times H^q(X) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(X)\\ {\scriptstyle f^*}\uparrow \quad \uparrow{\scriptstyle f^*} & & {\scriptstyle f^*}\uparrow\\ H^p(Y)\times H^q(Y) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(Y)\end{array}$$

定义 5.1.4 (卡积)**.** 设 $\beta\in S^q(X)$ 是 X 的 q 维奇异上链，$\sigma\in S_{p+q}(X)$ 是 X 的一个 $p+q$ 维奇异单形，定义它们的卡积 $\beta\cap\sigma\in S_p(X)$ 为

$$\beta\cap\sigma=\langle\beta,\sigma_q\rangle_p\sigma$$

得到一个双线性的卡积运算 $S^q(X)\times S_{p+q}(X)\xrightarrow{\cap}S_p(X)$。

命题 5.1.3. 设 $\beta\in S^q(X),\sigma\in S_{p+q}(X)$，则

$$\partial(\beta\cap\sigma)=(-1)^p(\delta\beta)\cap\sigma+\beta\cap(\partial\sigma)$$

命题 5.1.4. 上下链的卡积诱导了上下同调的卡积：

$$H^q(X)\times H_{p+q}(X)\xrightarrow{\cap}H_p(X)$$

注 5.1.2. 姜书中 P161 倒数第八行 $...(-1)^{p-1}\langle\beta,\partial\sigma_q\rangle_{p-1}\sigma$ 中应为 $\partial\sigma_{q+1}$。

定理 5.1.3. 上下链卡积的基本性质：

1. 结合性：对任意 $\alpha_1,\alpha_2\in S^*(X),c\in S_*(X)$ 有：

$$(\alpha_1\cup\alpha_2)\cap c=\alpha_1\cap(\alpha_2\cap c)$$

2. 对偶性：对任意 $\alpha_1\in S^*(X),\alpha_2\in S^*(X),c\in S_*(X)$ 有：

$$\langle\alpha_1\cup\alpha_2,c\rangle=\langle\alpha_1,\alpha\cap c\rangle$$

3. 自然性：设 $f:X\to Y$ 映射，有 $\beta\cap(f_\# c)=f_\#((f^\#\beta)\cap c)$，即有下图交换

$$\begin{tikzcd}
S^q(X)\times S_{p+q}(X) \arrow[r, "\cap"] \arrow[d, shift left, "f_\#"] & S^{p+q}(X) \arrow[d, "f_\#"'] \\
S^q(Y)\times S_{p+q}(Y) \arrow[r, "\cap"] \arrow[u, shift left, "f^\#"] & S^{p+q}(Y)
\end{tikzcd}$$

定理 5.1.4. 上积给出了上同调群的一个环结构，并且使得其成为交换的分次环，即

$$\alpha\cup\beta=(-1)^{pq}\beta\cup\alpha,\quad\forall\alpha\in H^p(X),\beta\in H^q(X)$$

并且映射 $f:X\to Y$ 诱导出上同调环之间的同态

$$f^*:H^*(Y)\to H^*(X)$$

5.1.1 准单纯复形中的上积和卡积

上一节中给出了奇异上同调群的环结构，但是为了更加实际的计算，我们引入准单纯复形的概念[19]。

在介绍准单纯复形之前，我们先来看该如何去描述胞腔上链 $C^q(X)$，因为准单纯复形是一种特殊的胞腔复形。

若 X 是有限胞腔复形，那么 $C_q(X)\cong\bigoplus_{\Lambda_q}\mathbb{Z}$，全体 q 胞腔记作 $\{e_i^q\mid i\in\Lambda_q\}$。一个 q 维胞腔链 c_q 的一般形式为

$$c_q=\sum_{i\in\Lambda_q}n_ie_i^q,\quad n_i\in\mathbb{Z}$$

[19] $\Delta-$complex

记

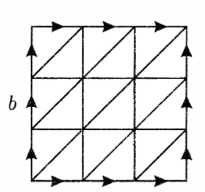
$$e_i^{q*}: C_q(X) \to \mathbb{Z}$$

$$c_q \mapsto n_i$$

故可认为 $(e_1^{q*}, \ldots, e_i^{q*}, \ldots)$ 是 $(e_1^q, \ldots, e_i^q, \ldots)$ 的对偶基，从而胞腔上链 $C^q(X)$ 是以 $\{e_i^{q*}\}_{i\in\Lambda_q}$ 为基的自由阿贝尔群。

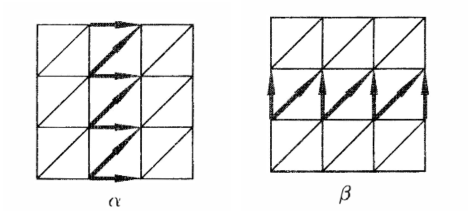
那么我们该怎么在胞腔剖分图上面画出 e_i^q 的对偶基呢？一个想法就是把 e_i^{q*} 就当成 e_i^q 在图上画出来，我们用下面的例子来具体解释这句话的含义。

例 5.1.1. 环面的如下胞腔复形剖分记作 K：



那么取剖分中的任一顶点 v，则 $[v]$ 构成了 $H_0(K)$ 的一组基；如果用 $t_i, i = 1, \ldots, 18$ 记剖分中出现的每一个三角形，那么 $[t_1 + \cdots + t_{18}]$ 构成了 $H_2(K)$ 的一组基；对于 $H_1(K)$ 来说，$\{[a], [b]\}$ 构成了其一组基。

下面我们来考虑对偶基的情况，给定 K 中任意顶点，$\{[v^*]\}$ 构成了 $H^0(K)$ 得到一组基；任取一个三角形 t_i，$\{[t_i^*]\}$ 构成了 $H^2(K)$ 的一组基，因为对任意的 i，我们都有 $t_i^*(t) = 1$；对于 $H^1(K)$ 来说，我们断言下面的两个上链，构成了 $H^1(K)$ 的一组基，并且是 $\{[a], [b]\}$ 的对偶基：



首先证明 $\delta\alpha = 0$，即对任意的 t_i，都有 $\langle \delta\alpha, t_i \rangle = 0$，这等价于验证 $\langle \alpha, \partial t_i \rangle = 0$，这从图上可以直接观察得出，同理可以验证 $\delta\beta = 0$；而对于 $\{[\alpha], [\beta]\}$ 是 $\{[a], [b]\}$ 对应的对偶基，可以看出 α 和 a 只在正方形的边上有一处重合，因此 $\langle \alpha, a \rangle$ 恰好为 1，并且 α 与 b 没有重合的部分，因此 $\langle \alpha, b \rangle = 0$，同理可以看出 $\langle \beta, a \rangle = 0, \langle \beta, b \rangle = 1$，因此 $H^1(K)$ 以 $\{[\alpha], [\beta]\}$ 为基。

定义 5.1.5 (准单纯复形)**.** 一个胞腔复形 K 称为是一个准单纯复形，如果

1. 其每个胞腔都已指定一个特征映射 $\sigma: \Delta_n \to K$，称为代表该胞腔的准单形；

2. 对于每个 n 维准单形 $\sigma:\Delta_n\to K$，以及每个整数 $0\le i\le n$，奇异单形 $\sigma\circ(e_0\dots\widehat{e_i}\dots e_n):\Delta_{n-1}\to K$ 都是 K 中的 $n-1$ 维准单形。

注 5.1.3. 如果 σ 是 n 维准单形，对任意 $0\le i_0<i_1<\cdots<i_q\le n$，则 $\sigma\circ(e_{i_0}e_{i_1}\dots e_{i_q})$ 必是 K 中的 q 维准单形，故可讨论准单形 σ 的前 p 维面 ${}_p\sigma$ 和后 $n-p$ 维 σ_{n-p}

注 5.1.4. 由于 K 的准单纯复形也是 K 的奇异单形，那么以准单形为基的胞腔链复形 $C_*(K)$ 自然也是奇异链复形 $S_*(K)$ 的子链复形，并且含入链映射 $\theta:C_*(K)\to S_*(K)$ 诱导了同构

$$\Theta:H_*(C_*(K))\xrightarrow{\cong}H_*(S_*(K))$$
$$\Theta^*:H^*(S^*(K))\xrightarrow{\cong}H^*(C^*(K))$$

与奇异同调的情形类似，我们可以定义准单纯上链中的上积与卡积。

定义 5.1.6 (准单纯上链的上积)**.** 设 K 是准单纯复形，$\alpha\in C^p(K),\beta\in C^q(K)$ 是 K 的准单纯上链，σ 是 $p+q$ 维准单形，定义上积 $\alpha\cup\beta\in C^{p+q}(K)$ 为如下的准单纯上链，它在 $p+q$ 维准单形 σ 上的值为：

$$\langle\alpha\cup\beta,\sigma\rangle=\langle\alpha,{}_p\sigma\rangle\langle\beta,\sigma_q\rangle$$

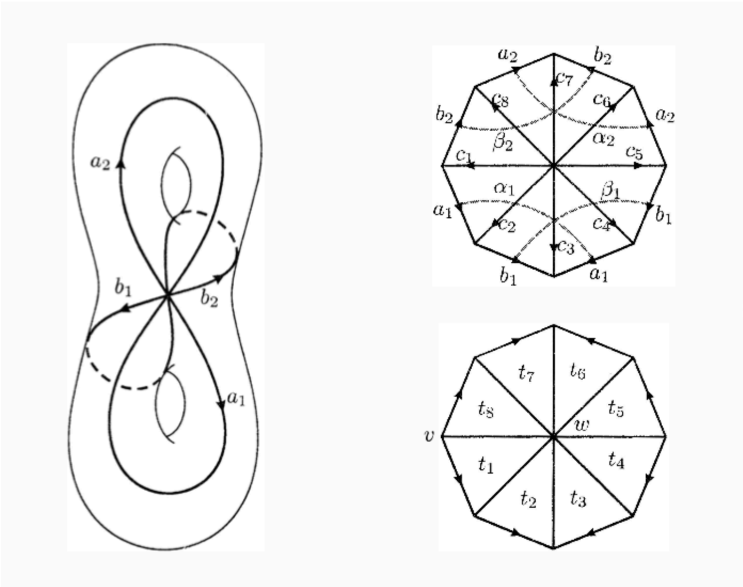
这样得到了一个双线性的上积运算 $C^p(K)\times C^q(K)\to C^{p+q}(K)$

定义 5.1.7 (准单纯上链的卡积)**.** 设 K 是准单纯复形，$\alpha\in C^p(K),\beta\in C^q(K)$ 是 K 的准单纯上链，σ 是 $p+q$ 维准单形，定义卡积 $\beta\cap\sigma\in C_p(K)$ 为

$$\beta\cap\sigma=\langle\beta,\sigma_q\rangle\cdot{}_p\sigma$$

这样得到了一个双线性的卡积运算 $C^q(K)\times C_{p+q}(K)\to C_p(K)$

例 5.1.2 (双环面 F_2 的准单纯剖分)**.** 我们取双环面 F_2 的一个准单纯剖分如下图：



有两个 0 维准单形 $\{v, w\}$，12 个 1 维准单形 $\{a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, \ldots, c_8\}$，以及 8 个 2 维准单形 $\{t_1, \ldots, t_8\}$，它们构成了 $C_*(F_2)$ 的基。而上链复形 $C^*(F_2)$ 中的对偶基记作 $\{v^*, w^*\}, \{a_1^*, b_1^*, a_2^*, b_2^*, c_1^*, \ldots, c_8^*\}, \{t_1^*, \ldots, t_8^*\}$

为了计算同调群，我们先写出如下的链复形

$$0 \to C_2(F_2) \xrightarrow{\partial} C_1(F_2) \xrightarrow{\partial} C_0(F_2) \to 0$$

并且边缘同态 ∂ 的具体形式为

$$\begin{cases} \partial a_1 = \partial a_2 = \partial b_1 = \partial b_2 = 0 \\ \partial c_i = v - w, \quad i = 1, \ldots, 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial t_1 = c_1 + a_1 - c_2, \quad \partial t_2 = c_2 + b_1 - c_3 \\ \partial t_3 = c_4 + a_1 - c_3, \quad \partial t_4 = c_5 + b_1 - c_4 \\ \partial t_5 = c_5 + a_2 - c_6, \quad \partial t_6 = c_6 + b_2 - c_7 \\ \partial t_7 = c_8 + a_2 - c_7, \quad \partial t_8 = c_1 + b_2 - c_8 \end{cases}$$

由于 $C_0(F_2)$ 中每一个链都是闭链，只由 $\{v, w\}$ 组成，并且显然 $[v] = [w]$，因为 $\partial c_i = v - w$，因此 $H_0(F_2)$ 的一组基为 $\{[v]\}$

下面考虑 $H_1(F_2)$：任取 $\sigma = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \delta_1 c_1 + \cdots + \delta_8 c_8$，如果 σ 是闭链，则

$$\partial\sigma = \delta_1 + \cdots + \delta_8 (v - w) = 0$$

即 σ 是闭链等价于 $\delta_1 + \cdots + \delta_8 = 0$；而 σ 什么时候是边缘链呢？此时需要考察 $C_2(F_2)$ 在 ∂ 下的像，直接计算有

$$\begin{aligned} \partial(x_1 t_1 + \cdots + x_8 t_8) = &(x_1 + x_3)a_1 + (x_5 + x_7)a_2 + (x_2 + x_4)b_1 + (x_6 + x_8)b_2 \\ &+ (x_1 + x_8)c_1 + (x_2 - x_1)c_2 - (x_2 + x_3)c_3 + (x_3 - x_4)c_4 \\ &+ (x_4 + x_5)c_5 + (x_6 - x_5)c_6 - (x_6 + x_7)c_7 + (x_7 - x_8)c_8 \end{aligned}$$

从而 $H_1(F_2)$ 的一组基为 $\{[a_1],[b_1],[a_2],[b_2]\}$

由于 $C_2(F_2)$ 中的边缘链为零，因此为了计算 $H_2(F_2)$，只需要计算其中的闭链，即我们的 $x_i \in \mathbb{Z}$ 要满足如下的关系：

$$x_5 = x_6 = x_1 = x_2 = -x_7 = -x_8 = -x_3 = -x_4$$

因此不妨取 $x_1 = 1$，那么 $z_2 = t_1 + t_2 - t_3 - t_4 + t_5 + t_6 - t_7 - t_8$ 所对应的等价类是 $H_2(F_2)$ 的一组基。

总结如下，对于 $H_*(F_2)$，我们有其一组基如下：

$$\begin{aligned} H_0(F_2) &= \operatorname{span}\{[v]\} \\ H_1(F_2) &= \operatorname{span}\{[a_1],[b_1],[a_2],[b_2]\} \\ H_2(F_2) &= \operatorname{span}\{[z_2]\} \end{aligned}$$

下面来确定其上同调群的一组对偶基：首先看 $[v]$ 的对偶基 ε，如果 $\langle \varepsilon, v\rangle = 1$，那么 ε 一定至少形如 $v^* + kw^*$，下面我们要求 ε 是闭的，即

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \sum_{i=1}^{8} k_i c_i\rangle &= \langle \varepsilon, \partial(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \sum_{i=1}^{8} k_i c_i)\rangle \\ &= \langle \varepsilon, \sum_{i=1}^{8} k_i (v - w)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{8} k_i - k(\sum_{i=1}^{8} k_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

这要求我们选取 $k = 1$，即 $[v]$ 的对偶基为 $v^* + w^*$；同样我们考虑 $H_1(F_2)$ 的对偶基，这里以 $[a_1]$ 作为例子：类似的思路，其对偶基至少要形如 $\alpha_1 = a_1^* + \lambda_2 a_2^* + \mu_1 b_1^* + \mu_2 b_2^* + \sum_{i=1}^{8} k_i c_i^*$，如果我们要求它闭，则：

$$\langle \delta\alpha_1, \sum_{i=1}^{8} x_i t_i\rangle = \langle \alpha_1, \partial(\sum_{i=1}^{8} x_i t_i)\rangle$$

根据之前的结果 $\{x_i\}$ 需要满足

$$\begin{aligned} & x_1 + x_3 + \lambda_2(x_5 + x_7) + \mu_1(x_2 + x_4) + \mu_2(x_6 + x_8) \\ & + k_1(x_1 + x_8) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(-x_2 - x_3) + k_4(x_3 - x_4) \\ & + k_5(x_4 + x_5) + k_6(x_6 - x_5) + k_7(-x_6 - x_7) + k_8(x_7 - x_8) = 0 \end{aligned}$$

首先根据 x_1, x_3 的系数我们至少应该有

$$\begin{cases} 1 + k_1 - k_2 = 0 \\ 1 - k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

我们不妨令 $k_2=k_3=1,k_1=k_4=0$，然而我们取定 k_1,k_2,k_3,k_4 后，我们会发现剩余 x_i 前面的系数都是未知数[20]，那么只需要让剩下所有的未知数全取零，自然是一个平凡的解，因此我们可以取 $[a_1]$ 的一个对偶基为 $a_1^*+c_2^*+c_3^*$[21]，其他的对偶基我们直接罗列如下：

$$\begin{aligned}\beta_1&=b_1^*+c_3^*+c_4^*\\\alpha_2&=a_2^*+c_6^*+c_7^*\\\beta_2&=b_2^*+c_7^*+c_8^*\end{aligned}$$

对于 $H_2(F_2)$ 来说，其对偶基就相对容易选取，因为其中每一个上链都是闭的，因此其对偶基可以选为下面的任何一个

$$\begin{aligned}\zeta=t_1^*&\sim t_2^*\sim -t_3^*\sim -t_4^*\\&\sim t_5^*\sim t_6^*\sim -t_7^*\sim -t_8^*\end{aligned}$$

最后我们来计算双环面 F_2 一维上同调类的上积和卡积：首先计算 $\alpha_1\cup\beta_1$：

$$\begin{aligned}\langle\alpha_1\cup\beta_1,t_2\rangle&=\langle\alpha_1,{}_1(t_2)\rangle\langle\beta_1,(t_2)_1\rangle\\&=\langle a_1^*+c_2^*+c_3^*,c_2\rangle\langle b_1^*+c_3^*+c_4^*,b_1\rangle\\&=1\end{aligned}$$

利用类似的重复计算我们可以得到

$$\begin{aligned}[\alpha_i]\cup[\beta_j]=-[\beta_j]\cup[\alpha_i]=\delta_{ij}[\zeta]\\ [\alpha_i]\cup[\alpha_j]=[\beta_i]\cup[\beta_j]=0\end{aligned}$$

对于卡积，我们计算

$$\begin{aligned}\alpha_1\cap z_2&=\alpha_1\cap t_1+\alpha\cap t_2+\cdots-\alpha_1\cap t_7-\alpha_1\cap t_8\\&=\langle\alpha_1,(t_1)_1\rangle\,{}_1(t_1)+\langle\alpha_1,(t_2)_1\rangle\,{}_1(t_2)-\langle\alpha_1,(t_3)_1\rangle\,{}_1(t_3)\\&=c_1-c_4\\&\sim -b_1\end{aligned}$$

因此 $[\alpha_1]\cap[z_2]=-[b_1]$，利用重复计算我们可以得到

$$\begin{aligned}[\alpha_i]\cap[z_2]&=-[b_i]\\ [\beta_i]\cap[z_2]&=[a_i]\end{aligned}$$

[20]当然你也可以在前一步的时候令 $k_1=k_4=-1,k_2=k_3=0$，但此时你会发现剩下的 x_i 前面的系数不全是未知数，因此我们之前的取法是大有深意的。

[21]姜书中此处直接给出了对偶基的形式，我们当然可以直接验证这些东西真的是对偶基，但是通过待定系数的方法来具体计算一下为什么对偶基是长成这样是必要的，虽然会显得十分繁琐，但我认为做学问理应刨根问底。

5.2 叉积

给定拓扑空间 X, Y，以及 $X \times Y$ 到第一个分量 X 和第二个分量 Y 的投影 p_1, p_2，我们如下定义奇异同调群 $H^p(X), H^q(Y)$ 的叉积

定义 5.2.1 (叉积). 任取 $\xi \in H^p(X), H^q(Y)$，定义

$$\begin{aligned} \times : H^p(X) \times H^q(Y) &\to H^{p+q}(X \times Y) \\ (\xi, \eta) &\mapsto p_1^*(\xi) \cup p_2^*(\eta) \end{aligned}$$

称为 $H^p(X)$ 和 $H^q(Y)$ 的叉积。

这样定义叉积简单明了，但是相关性质并不明晰，我们想要在胞腔同调里发展类似的乘积，用一种更加自然更加直观的方法来得出胞腔同调的叉积，再说明这种叉积与我们在这里定义的是相同的。

5.2.1 Künneth 公式的代数形式

我们先回顾一些代数上的知识：之前我们已经定义过了分次群的张量积，而对于两个自由链复形 $C = \{C_q, \partial^C\}, D = \{D_q, \partial^D\}$ 来说，它们不仅仅是分次群，并且带有一个边缘同态 ∂。如果考虑它们的张量积，作为分次群它们自然有

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} (C_p \otimes D_q)$$

并且也应该有一个合适的边缘同态 $\partial^{\otimes}$，使得 $C \otimes D$ 成为一个链复形。我们如下定义：对于 $c_p \in C_p, d_q \in D_q, p+q=n$，有

$$\partial_n^{\otimes}(c_p \otimes d_q) = \partial^C c_p \otimes d_q + (-1)^p c_p \otimes \partial^D d_q$$

我们断言，$C \otimes D = \{(C \otimes D)_n, \partial^{\otimes}\}$ 构成了一个链复形。这只需要验证 $\partial^{\otimes}\partial^{\otimes} = 0$，直接验证[22]如下：

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}^{\otimes}\partial_n^{\otimes}(c_p \otimes d_q) =& \partial_{n-1}^{\otimes}((\partial_p c_p) \otimes d_q + (-1)^p c_p \otimes (\partial_q d_q)) \\ =& (\partial_{p-1}\partial_p c_p) \otimes d_q + (-1)^{p-1}(\partial_p c_p) \otimes (\partial_q d_q) \\ & + (-1)^p (\partial_p c_p) \otimes (\partial_q d_q) + (-1)^{2p} c_p \otimes (\partial_{q-1}\partial_q d_q) \\ =& 0 \end{aligned}$$

定义 5.2.2 (链映射的张量积). 给定两个链映射 $f : C \to C', g : D \to D'$，定义：

$$\begin{aligned} f \otimes g : C \otimes D &\to C' \otimes D' \\ c_p \otimes d_q &\mapsto f_p(c_p) \otimes g_q(d_q) \end{aligned}$$

[22] $(-1)^p$ 发挥了至关重要的作用

我们需要验证这样定义的链映射的张量积真的是一个链映射,即需要验证 $\partial^{\otimes}(f\otimes g)=(f\otimes g)\partial^{\otimes}$，直接验证如下：

$$\begin{aligned}\partial^{\otimes}(f\otimes g)\left(c_p\otimes d_q\right)&=\partial^{\otimes}\left(\left(f_pc_p\right)\otimes\left(g_qd_q\right)\right)\\&=\left(\partial_pf_pc_p\right)\otimes g_qd_q+(-1)^p\left(f_pc_p\right)\otimes\left(\partial_qg_qd_q\right)\\&=\left(f_{p-1}\partial_pc_p\right)\otimes g_qd_q+(-1)^p\left(f_pc_p\right)\otimes\left(g_{q-1}\partial_qd_q\right)\\&=\left(f_{p-1}\otimes g_q\right)\left(\left(\partial_pc_p\right)\otimes d_q\right)+(-1)^p\left(f_p\otimes g_{q-1}\right)\left(c_p\otimes\left(\partial_qd_q\right)\right)\\&=(f\otimes g)\left(\left(\partial_pc_p\right)\otimes d_q+(-1)^pc_p\otimes\left(\partial_qd_q\right)\right)\\&=(f\otimes g)\partial^{\otimes}\left(c_p\otimes d_q\right).\end{aligned}$$

命题 5.2.1. 若 $f\simeq f':C\to C',g\simeq g':D\to D'$，则必有 $f\otimes g\simeq f'\otimes g':C\otimes D\to C'\otimes D'$。特别地，如果有链同伦等价 $C\simeq C',D\simeq D'$，则有

$$C\otimes D\simeq C'\otimes D'$$

定理 5.2.1. 设 C,C',D,D' 都是自由链复形，如果 $H_*(C)\cong H_*(C')$ 和 $H_*(D)\cong H_*(D')$，那么有

$$H_*(C\otimes D)\cong H_*(C'\otimes D')$$

证明. 根据定理 4.1.1, 有 $C\cong C',D\cong D'$, 因此根据命题 5.2.1, 有 $C\otimes D\cong C'\otimes D'$, 从而 $H_*(C\otimes D)\cong H_*(C'\otimes D')$ □

定理 5.2.2 (Künneth 公式)**.** 设 C,D 是自由链复形，且 $H_*(D)$ 是有限生成的自由分次群，那么

$$H_*(C\otimes D)=H_*(C)\otimes H_*(D),\quad H^*(C\otimes D)=H^*(C)\otimes H^*(D)$$

证明. 把分次群 $H_*(D)$ 看成是边缘算子为零的链复形, 则根据 $H_*(D)=H_*(H_*(D))$ 有 $D\cong H_*(D)$，再根据定理 5.2.1，有

$$\begin{aligned}H_*(C\otimes D)&=H_*(C\otimes H_*(D))\\&=H_*(C)\otimes H_*(D)\end{aligned}$$

□

推论 5.2.1. 设 C,D 是自由链复形,且 $H_*(C),H_*(D)$ 都是有限生成的,则 $H_*(C\otimes D)$ 也是有限生成的，并且 Betti 数 β_n

$$\beta_n(C\otimes D)=\sum_{p+q=n}\beta_p(C)\beta_q(D)$$

因此 Poincaré 多项式满足

$$P_{C\otimes D}(t)=P_C(t)P_D(t)$$

有了代数形式的 Künneth 公式，我们想要通过其得到拓扑形式的 Künneth 公式：给定拓扑空间 X,Y，如果有奇异链复形的同构 $S_*(X\times Y)=S_*(X)\otimes S_*(Y)$，那么根据代数形式的 Künneth 公式，我们可以直接得到其拓扑形式

$$H_*(X\times Y)=H_*(X)\otimes H_*(Y)$$

但是对一般的拓扑空间来说，并没有那么美好的事情发生。因此我们有以下两种解决思路：

1. 找一类特殊的拓扑空间，使得 $S_*(X\times Y)=S_*(X)\otimes S_*(Y)$
2. 如果我们想要得到 $H_*(X\times Y)=H_*(X)\otimes H_*(Y)$，实际上也不需要 $S_*(X\times Y)=S_*(X)\otimes S_*(Y)$，只要有 $S_*(X\times Y)\simeq S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 即可，即去寻找自然的链同伦等价。

第一种解决思路导出的解决方案就是胞腔同调，而第二种办法则是 Eilenberg−Zilber 的工作，构造了 Eilenberg − Zilber 链映射。

5.2.2 胞腔同调的 Künneth 公式

假设 X,Y 都是有限胞腔复形，X 中 p 胞腔全体记作 $\{e_i^p\}$，Y 中 q 胞腔全体记作 $\{f_j^q\}$，那么根据胞腔复形的性质，$X\times Y$ 的 n 胞腔全体为 $\{e_i^p\times f_j^q\}_{p+q=n}$。如果我们把 $e_i^p\times f_j^q$ 与 $e_i^p\otimes f_j^q$ 等同起来不加以区分，那么我们就有我们期待的链复形的同构，即

$$C_*(X\times Y)=C_*(X)\otimes C_*(Y)$$
$$C^*(X\times Y)=C^*(X)\otimes C^*(Y)$$

并且：

命题 5.2.2. 链复形 $C_*(X\times Y)$ 的边缘同态为

$$\partial(e_i^p\otimes f_j^q)=(\partial e_i^p)\otimes f_j^q+(-1)^p e_i^p\otimes(\partial f_j^q)$$

恰好是链复形张量积的边缘同态

命题 5.2.3. 设 $f:X\to X',g:Y\to Y'$ 都是胞腔复形之间的胞腔映射，则 $f\times g:X\times Y\to X'\times Y'$ 也是胞腔映射，并且胞腔链映射

$$(f\times g)_\#^C:C_*(X\times Y)\to C_*(X'\times Y')$$

恰好是链映射的张量积

$$f_\#^C\otimes f_\#^C:C_*(X)\otimes C_*(Y)\to C_*(X')\otimes C_*(Y')$$

因此，根据代数形式的 Künneth 公式，我们有

定理 5.2.3. 设 X, Y 是有限胞腔复形，并且 $H_*(Y)$ 是自由的，那么

$$H_*(X \times Y) = H_*(X) \otimes H_*(Y)$$
$$H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y)$$

推论 5.2.2. 设 X, Y 是有限胞腔复形，则 Betii 数

$$\beta_n(X \times Y) = \sum_{p+q=n} \beta_p(X)\beta_q(Y)$$

并且 Poincaré 多项式满足

$$P_{C\otimes D}(t) = P_C(t)P_D(t)$$

为了更好的利用胞腔复形这样的性质，我们在自由链复形上继续介绍几种操作，在之后我们会看到这些操作可以过渡到胞腔同调的上积、卡积、斜积与叉积。

5.2.3 下同调类的张量积

设 C, D 是自由链复形，基分别是 $\{c_i^p\}, \{d_j^q\}$，张量积链复形 $C \otimes D$ 引起了同调类之间的张量积运算

定义 5.2.3 (下链的张量积)**.** 双线性函数

$$\otimes : C_p \times D_q \to (C \otimes D)_{p+q}$$
$$(c_i^p, d_j^q) \mapsto c_i^p \otimes d_j^q$$

称为下链的张量积。

命题 5.2.4. 下链的张量积的边缘公式为

$$\partial(a \otimes b) = (\partial a) \otimes b + (-1)^p a \otimes (\partial b), \quad a \in C_p, b \in D_q$$

因而诱导了下同调的张量积

$$H_p(C) \times H_q(D) \xrightarrow{\otimes} H_{p+q}(C \otimes D)$$

定理 5.2.4. 下同调张量积的基本性质：

1. 对于任意的 $x \in H_p(C), y \in H_q(D), z \in H_r(E)$，有

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

2. 自然性：设 $f : C \to C', g : D \to D'$ 都是链映射，对任意的 $x \in H_p(C), y \in H_q(D)$，有

$$(f \otimes g)_*(x \otimes y) = (f_*x) \otimes (f_*y)$$

5.2.4 上同调类的张量积

定义 5.2.4 (上链的张量积). 双线性函数

$$\otimes : C^p \times D^q \to (C \otimes D)^{p+q}$$

规定为

$$\langle \alpha \otimes \beta, a \otimes b \rangle = \langle \alpha, a \rangle \langle \beta, b \rangle$$

注 5.2.1. 在上面的定义中，$\alpha \in C^p, \beta \in D^q, a \in C_{p'}, b \in D_{q'}$，满足 $p+q=p'+q'$，但只有当 $p=p', q=q'$ 时，才可能非零。

命题 5.2.5. 上链的张量积的上边缘公式为

$$\delta(\alpha \otimes \beta) = (\delta\alpha) \otimes \beta + (-1)^p \alpha \otimes (\delta\beta), \quad \alpha \in C^p, \beta \in D^q$$

因而上链的张量积诱导出上同调类的张量积。

定理 5.2.5. 上同调张量积的基本性质：

1. 对于任意的 $\xi \in H^p(C), \eta \in H^q(D), \zeta \in H^r(E)$，有

$$(\xi \otimes \eta) \otimes \zeta = \xi \otimes (\eta \otimes \zeta)$$

2. 与下同调张量积的配对：对任意 $\xi \in H^p(C), \eta \in H^q(D)$ 和任意 $x \in H_p(C), y \in H_q(D)$，有

$$\langle \xi \otimes \eta, x \otimes y \rangle = \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y \rangle$$

3. 自然性：设 $f : C \to C', g : D \to D'$ 都是链映射，对任意的 $\xi' \in H^p(C'), \eta' \in H^q(D')$，有

$$(f \otimes g)^*(\xi' \otimes \eta') = (f^*\xi') \otimes (f^*\eta')$$

5.2.5 上下同调的斜积

定义 5.2.5 (上下链的斜积). 双线性函数

$$\begin{aligned} \backslash : D^q \times (C \otimes D)_{p+q} &\to D_p \\ (\beta, a \otimes b) &\mapsto \langle \beta, b \rangle \cdot a \end{aligned}$$

命题 5.2.6. 上下链的斜积的边缘公式是

$$\partial(\beta \backslash c) = (-1)^p (\delta\beta) \backslash c + \beta \backslash (\partial c), \quad \beta \in D^q, c \in (C \otimes D)_{p+q}$$

因而链的斜积诱导出上下同调的斜积。

定理 5.2.6. 斜积的基本性质：

1. 对于任意的 $\eta \in H^q(D), \zeta \in H^r(E), w \in H_{p+q+r}(C \otimes D \otimes E)$，有
$$(\eta \otimes \zeta)\backslash w = \eta\backslash(\zeta\backslash w)$$

2. 对偶性：对任意 $\xi \in H^p(C), \eta \in H^q(D), z \in H_{p+q}(C \otimes D)$，有
$$\langle \xi \otimes \eta, z \rangle = \langle \xi, \eta\backslash z \rangle$$

3. 自然性：设 $f : C \to C', g : D \to D'$ 都是链映射，对任意的 $\eta' \in H^q(D'), z \in H_{p+q}(C \otimes D)$，有
$$f_*((g^*\eta')\backslash z) = \eta'\backslash(f \times g)_* z$$

5.2.6 胞腔同调的叉积

在前几节中介绍了上下同调的张量积以及斜积，再次利用胞腔复形良好的性质
$$C_*(X \times Y) = C_*(X) \otimes C_*(Y)$$
我们得到了以下三种运算
$$\begin{aligned}
&\text{下同调叉积：} H_p(X) \times H_q(X) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(X) \\
&\text{上同调叉积：} H^p(X) \times H^q(X) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X) \\
&\text{上下同调斜积：} H^q(X) \times H_{p+q}(X) \xrightarrow{\backslash} H_p(X)
\end{aligned}$$
在之后我们将证明，这样定义的胞腔同调的叉积，与我们把胞腔同调与奇异同调做等同，然后考虑我们在一开始定义的奇异同调定义的叉积是一样的。

5.2.7 胞腔同调的上积与卡积

用 $\Delta : X \to X \times X$ 来记胞腔复形 X 的对角线映射，它诱导的下同调同态和上同调同态和胞腔同调的叉积与斜积结合起来，得到胞腔同调下的上积与卡积。

定义 5.2.6. 下面的交换图表定义了一个双线性运算 $\cup : H^p(X) \times H^q(X) \to H^{p+q}(X)$，称为 X 上同调的上积
$$\begin{tikzcd}
H^p(X) \times H^q(X) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\times"] & H^{p+q}(X) \arrow[d, equal] \\
H^{p+q}(X \times X) \arrow[r, "\Delta^*"] & H^{p+q}(X)
\end{tikzcd}$$

定理 5.2.7. 上积的基本性质：

1. 结合性：对任意的 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in H^*(X)$，有

$$(\xi_1 \cup \xi_2) \cup \xi_3 = \xi_1 \cup (\xi_2 \cup \xi_3)$$

2. 有单位：用 $\varepsilon \in C^0(X)$ 记在 X 的每一个 0 胞腔上取值都是 1 的胞腔上链，则

$$\varepsilon \cup \xi = \xi \cup \varepsilon = \xi, \quad \forall \xi \in H^*(X)$$

3. 自然性：在映射 $f : X \to Y$，对任意的 $\eta_1, \eta_2 \in H^*(Y)$，有

$$f^*(\eta_1 \cup \eta_2) = (f^*\eta_1) \cup (f^*\eta_2), \quad f^*(\varepsilon_Y) = \varepsilon_X$$

4. 交换性：对任意 $\xi_1 \in H^p(X), \xi_2 \in H^q(X)$，有

$$\xi_1 \cup \xi_2 = (-1)^{pq} \xi_2 \cup \xi_1$$

定义 5.2.7. 下面的交换图表定义了一个双线性运算 $\cap : H^q(X) \times H_{p+q}(X) \to H_p(X)$，称为 X 上下同调的卡积

$$\begin{tikzcd}
H^q(X) \times H_{p+q}(X) \arrow[r, "\cap"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \Delta_*"] & H_p(X) \arrow[d, equal] \\
H^q(X) \times H_{p+q}(X \times X) \arrow[r, "\backslash"] & H_p(X)
\end{tikzcd}$$

定理 5.2.8. 卡积的基本性质：

1. 结合性：对任意的 $\xi_1, \xi_2 \in H^*(X), x \in H_*(X)$，有

$$(\xi_1 \cup \xi_2) \cap x = \xi_1 \cap (\xi_2 \cap x)$$

2. 对偶性：对任意的 $\xi_1 \in H^*(X), \xi_2 \in H^*(X), x \in H_*(X)$，有

$$\langle \xi_1 \cup \xi_2, x \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \cap x \rangle$$

3. 有单位：上积的单位也是卡积的单位；

4. 自然性：在映射 $f : X \to Y$，对任意的 $\eta \in H^*(Y), x \in H_*(X)$，有

$$f_*((f^*\eta) \cap x) = \eta \cap (f_* x)$$

5.2.8 Eilenberg-Zilber 定理

设 X, Y 是拓扑空间，$S_*(X), S_*(Y)$ 都是自由链复形，此时一般 $S_*(X\times Y)\neq S_*(X)\otimes S_*(Y)$，但是我们有下面的定理

定理 5.2.9 (Eilenberg-Zilber 定理)**.** 对于拓扑空间 X, Y，存在自然的链同伦等价

$$S_*(X)\otimes S_*(Y)\simeq S_*(X\times Y)$$

即存在自然的链同伦等价

$$S_*(X)\otimes S_*(Y)\xrightarrow{\Phi} S_*(X\times Y)\xrightarrow{\Psi} S_*(X)\otimes S_*(Y)$$

注 5.2.2. 定理中的链同伦等价在同伦的意义下是唯一的，即如果 Φ', Ψ' 是另一对自然的链同伦等价，则必然有链同伦 $\Phi\simeq\Phi, \Psi\simeq\Psi'$

注 5.2.3. Φ, Ψ 及其对偶诱导的同调群以及上同调水平的同构,一概称为 Eilenberg − Zilber 同构，简称为 EZ

注 5.2.4 (EZ 的构造)**.** 用 p_1, p_2 分别记 $X\times Y$ 到第一个分量 X 和第二个分量 Y 的投影。对于 n 维奇异单形 $\sigma:\Delta_n\to X\times Y$，用 ${}_i\sigma$ 记 σ 的前 i 维面，σ_j 记 σ 的后 j 维面，则一个链同伦等价 $\mathrm{EZ}: S_*(X\times Y)\to S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 是

$$\mathrm{EZ}(\sigma)=\sum_{i+j=n}\rho_{1\#}({}_i\sigma)\otimes\rho_{2\#}(\sigma_j)$$

定理 5.2.10 (Künneth 公式)**.** X, Y 是拓扑空间，$H_*(Y)$ 是有限生成的自由阿贝尔群，那么

$$H_*(X\times Y)=H_*(X)\otimes H_*(Y)$$
$$H^*(X\times Y)=H^*(X)\otimes H^*(Y)$$

推论 5.2.3. X, Y 是拓扑空间,$H_*(X), H_*(Y)$ 是有限生成的自由阿贝尔群,则 $H_*(X\times Y)$ 也是有限生成的，并且 $\beta_n(X\times Y)=\sum_{i+j=n}\beta_i(X)\beta_j(Y)$，即 Poincaré 多项式满足

$$P_{X\times Y}(t)=P_X(t)P_Y(t)$$

5.2.9 奇异同调的叉积

定义 5.2.8 (奇异上链的叉积)**.** X, Y 是拓扑空间，双线性函数

$$S^p(X)\times S^q(X)\xrightarrow{\otimes} S^p(X)\otimes S^q(X)\xrightarrow{\mathrm{EZ}} S^{p+q}(X\times Y)$$

称为奇异上链的叉积，记作 $S^p(X)\times S^q(X)\xrightarrow{\times} S^{p+q}(X\times Y)$

命题 5.2.7. 奇异上链的叉积的上边缘公式是

$$\delta(\alpha \times \beta) = \delta\alpha \times \beta + (-1)^p \alpha \times \delta\beta, \quad \alpha \in S^p(X), \beta \in S^q(Y)$$

它诱导了上同调层面的叉积 $H^p(X) \times H^q(X) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times Y)$

命题 5.2.8. X 是拓扑空间，$\Delta: X \to X \times X$ 是对角线映射，则有交换图表，从而在同调群的层面上有

$$\xi \cup \eta = \Delta^*(\xi \times \eta)$$

命题 5.2.9. X, Y 是拓扑空间，则有交换图表，即对任意 $\alpha \in S^p(X), \beta \in S^q(Y)$，有 $\alpha \times \beta = p_1^{\#}(\alpha) \cup p_2^{\#}(\beta)$，从而在同调的水平上有

$$\xi \times \eta = p_1^*(\alpha) \cup p_2^*(\eta)$$

注 5.2.5. 这个命题揭示了我们为什么在一开始要如此定义奇异同调的叉积。

5.3 Poincaré 对偶

定义 5.3.1 (正则胞腔复形)**.** 假设 X 是有限胞腔复形，若还满足

1. 对每一个 q 胞腔 e_i^q，存在同胚 $\varphi_i^q: (D^q, S^{q-1}) \to (\overline{e}_i^q, \dot{e}_i^q)$，即特征映射可以取成同胚；
2. 每一个胞腔的边缘都是 X 中胞腔的并。

注 5.3.1. 每个正则胞腔复形可以通过重心重分加细成一个有限单纯复形。

定理 5.3.1. 一个闭的光滑流形 M^n 都有一个有限正则胞腔剖分，称带正则胞腔剖分的 M^n 为胞腔流形。

定义 5.3.2 (基本类/定向类)**.** 设 M^n 是胞腔流形，如果 M^n 的全体 n 胞腔选取定向，使得每两个相邻的 n 胞腔在其公共的 $n-1$ 面上诱导出相反的定向，等价地说 $\sum_{s^n \in M^n} s^n$ 是闭链，则称 M^n 可定向，否则称其不可定向。此时称 $Z^n = \sum_{s^n \in M^n} s^n$ 叫做定向闭链，其代表的同调类 $[M]$ 叫做 M^n 的基本类（定向类）。

注 5.3.2. 考虑 $\mathbb{Z}_2$ 系数时，$Z^n = \sum_{s^n \in M^n} s^n$ 总是 $\mathbb{Z}_2$ 系数的闭链，

定理 5.3.2 (Poincaré 对偶)**.** M^n 是 n 维可定向流形，则

1. 有对偶 $D: H^q(M) \to H_{n-q}(M), \forall 0 \le q \le n$
2. $D\xi = \xi \cap [M]$，即如下的交换图表

定理 5.3.3 ($\mathbb{Z}_2$ 系数的 Poincaré 对偶)**.** M^n 是 n 维流形，则

1. 有对偶 $D: H^q(M;\mathbb{Z}_2) \to H_{n-q}(M;\mathbb{Z}_2), \forall 0 \le q \le n$

2. $D\xi = \xi \cap [M]$，即如下的交换图表

推论 5.3.1. 奇数维流形的欧拉示性数为零。

推论 5.3.2. 设 M^n 是连通的闭流形，则

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & M^n \text{ 可定向} \\ 0, & M^n \text{ 不可定向} \end{cases}$$